Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270373
Centre d'intérêt: 89

Fortier, Marielle.

Résultats d'une recherche en apprentissage sur les diviseurs d'un nombre / M. Fortier, B. Héraud, L. Thérien ; [pour la] Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, 1980.
87 p. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke, Département de mathématiques ; 29)

En tête du titre: Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.
Bibliographie: p. 86-87.

Cote Dewey: 510.7/F741r Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Expérimentation pédagogique *Théorie de l'apprentissage *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de nom: *Piaget, Jean

Identificateur(s) de sujet: *Groupement (Concept) *Diviseur *Nombre *Unité d'enseignement *Approche piagétienne

Rapport qui décrit les résultats d'une recherche sur la pertinence de l'utilisation de la notion mathématique de groupement dans l'enseignement de l'arithmétique au primaire. L'étude vise ultimement à élaborer une unité d'enseignement sur diverses propriétés et notions arithmétiques. Elle cherche à inventorier, à partir d'un matériel approprié, les actions que des enfants de sept et huit ans utilisent spontanément pour effectuer une consigne équivalant, sur le plan mathématique, à chercher les diviseurs d'un nombre donné. Parallèlement, elle examine les débuts de structuration que ces actions sous-tendent. Le rapport décrit en fait, de façon détaillée, la cinquième étape dont il est question dans le rapport no 27: **Recherche en apprentissage et en enseignement sur les diviseurs d'un nombre**.

L'expérimentation a eu lieu en septembre 1979 dans deux écoles, auprès de seize enfants de deuxième année et de seize enfants de troisième année. Chaque expérimentation avec un enfant a été enregistrée sur bande magnétoscopique et s'est déroulée en présence de deux expérimentateurs et de l'assistant technicien. L'enfant disposait d'un support avec tiges et de soixante jetons troués. On lui demandait de placer les jetons dans les tiges de manière à former des piles de même hauteur et de chercher le plus de façons possibles de réaliser cette opération.

Les tendances que les enfants ont manifestées dans le choix de leurs actions pour trouver les diviseurs d'un nombre, les débuts de structuration qu'ils ont commencé à construire très librement, les notions et propriétés mathématiques qu'ils ont approchées à leur insu,

sont autant de données que les auteurs se proposent d'exploiter dans l'élaboration d'une unité d'enseignement.

Type de document: r
Notice(s) connexe(s): 8270371
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ-DGES
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270373

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Juillet 1980 Rapport No 29

RESULTATS D'UNE RECHERCHE EN APPRENTISSAGE SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE

par
M. Fortier, B. Héraud, L. Thérien

Faculté des sciences Département de mathématiques

E D U Q 8270373

SECTION ENSEIGNEMENT

Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

Juillet 1980 Rapport No 29

RESULTATS D'UNE RECHERCHE EN APPRENTISSAGE SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE

par
M. Fortier, B. Héraud, [illegible] Thérien

Projet de recherche subventionné
par le programme FCAC
du Ministère de l'Education du Québec

TABLE DES MATIERES

Avertissement au lecteur 2

Introduction 3

I Expérimentation 5
- 1.1 Etapes préliminaires 5
- 1.2 Description de la situation 6
- 1.3 Résultats 7
  - 1.3.1 Description des actions identifiées 7
  - 1.3.2 Graphes des actions identifiées 9
  - 1.3.3 Tableaux et analyse des résultats 41

II Situation de l'expérimentation dans le cadre des groupements 61
- 2.1 La notion de groupement 61
- 2.2 Considérations sur les termes utilisés 63
- 2.3 Analyse de graphes sous l'aspect des groupements 64
- 2.4 Cadres de référence pour les graphes obtenus 69
- 2.5 Approche classique vs approche "groupements" pour structurer les diviseurs d'un nombre 73

III Notions et propriétés reliées aux actions 76

Conclusion 85

Bibliographie 86

Avertissement au lecteur

Le Rapport No 27 [10] relate le déroulement de quatre étapes qui ont conduit à celle qui est décrite dans ce document. Le lecteur peut s'y référer pour de plus amples renseignements. Cependant, nous voulons présenter ici un rapport suffisamment complet de la cinquième étape pour permettre une bonne compréhension de l'ensemble de notre recherche et des résultats obtenus.

Introduction

Les travaux de J. Piaget ont nourri depuis plus de 20 ans le développement d'une didactique nouvelle. Plus précisément, sur le plan de la mathématique, on peut signaler trois applications didactiques successives découlant de ces travaux. La première fut l'importance accordée à la *manipulation*, suite à la mise en lumière du rôle prépondérant des actions concrètes dans l'apprentissage d'un concept. La deuxième se caractérisa par l'élaboration de divers modèles d'*étapes d'apprentissage* décrivant la structuration et l'abstraction progressives propres au développement de concepts mathématiques.

La troisième application, plus récente et venant donner tout leur sens aux deux premières, provient de l'élément majeur suivant du modèle piagétien, appelé *groupement*: la structuration des actions conduisant à un concept, bien que répondant à des règles universelles, procède d'une dynamique interne et propre à chaque individu. Cette application consiste donc à *aider l'apprenant à structurer ses actions* plutôt qu'à lui imposer des actions et des structurations extérieures, du moins dans les premiers stades de l'apprentissage. Le courant actuel axé sur la résolution de problèmes peut être relié à cette application. E. Wittmann, qui a présenté une formalisation mathématique de la notion de groupement [1], [2] que nous avons adoptée, a développé une stratégie d'enseignement relative à des situations de problèmes et fondée sur cette application [3].

La recherche que nous présentons ici s'inscrit essentiellement dans cette optique. Elle s'insère dans un projet plus vaste intitulé: "Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques" sous la direction de D. Lunkenbein [4]. Dans un premier

temps, plusieurs recherches ont été menées sur la pertinence de l'utilisation de la notion mathématique de groupement dans l'enseignement de la mathématique au primaire [5], [6], [7], [8]. Plus récemment, une recherche en apprentissage a été entreprise par D. Lunkenbein sur l'étude des actions et des modes de structuration d'enfants confrontés à un problème de type combinatoire [9].

Le présent rapport décrit les résultats d'une recherche analogue en arithmétique. Elle poursuit l'objectif supplémentaire d'élaborer une unité d'enseignement sur diverses propriétés et notions arithmétiques. Plus précisément, nous avons cherché à inventorier les actions que des enfants de 7 et 8 ans utilisaient spontanément, sur un matériel approprié, pour effectuer une consigne équivalant sur le plan mathématique à chercher les diviseurs d'un nombre donné. Parallèlement, nous avons observé les débuts de structurations que ces actions sous-tendaient. Nous tenterons, à la lumière de ces données, de développer un type d'intervention pédagogique qui respecte la démarche naturelle de l'enfant tout en l'orientant vers des structurations suffisamment riches pour être exploitées dans des domaines connexes.

I. Expérimentation

1.1 Etapes préliminaires

Quatre étapes ont précédé l'expérimentation qui fait l'objet du présent rapport [10]. La première a été caractérisée par l'exploration de matériels. A la deuxième étape, un nouveau matériel jugé plus pertinent a été expérimenté et une clientèle plus diversifiée a été choisie. La troisième a permis plus particulièrement de préciser davantage la clientèle.

Les objectifs principaux poursuivis à la quatrième étape ont été les suivants:

1) déterminer entre deux matériels le plus approprié à l'observation d'actions variées;
2) analyser le rôle de différents nombres dans l'apparition de ces actions;
3) définir d'une façon précise les actions utilisées par les enfants dans la recherche des diviseurs d'un nombre et étudier leur pertinence dans l'élaboration de l'unité d'enseignement.

Quelques conclusions découlant de cette dernière étape ont permis de fixer les objectifs et les modalités de la cinquième étape:

1) dans une nouvelle expérimentation, avec un plus grand nombre d'enfants, avec un seul matériel, par une observation plus systématique grâce à l'utilisation de bandes magnétoscopiques, tenter de mieux déceler les actions définies, d'identifier le mieux possible les actions indéterminées en fonction d'actions déjà trouvées et éventuellement de repérer de nouvelles actions;
2) expérimenter sur le nombre 60 dont la pertinence s'est révélée à la suite de l'analyse théorique de la participation des actions dans la recherche des diviseurs;

3) relever dans les données recueillies les indications de groupements ou fragments de groupements en formation;

4) analyser les différentes catégories d'actions en cherchant lesquelles pourraient avantageusement être exploitées dans l'unité d'enseignement.

1.2 Description de la situation

L'enfant dispose d'un support avec tiges

et de soixante (60) jetons troués. On lui demande de placer les jetons dans les tiges de manière à former des piles de même hauteur et de chercher le plus de façons possibles.

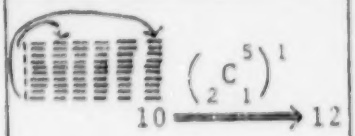
La clientèle choisie se répartit comme suit:

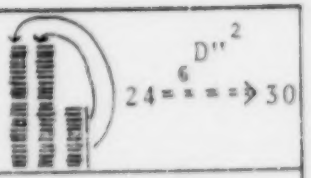
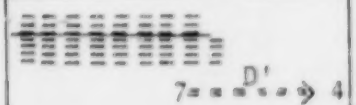
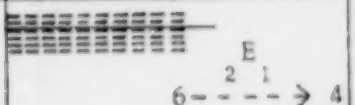
	2e année		3e année	
	f	g	f	g
Ecole A	4	2	4	3
Ecole B	4	6	4	5

Les enfants sont classés par les enseignants respectifs dans la catégorie "moyens-forts".

Chaque expérimentation clinique avec un enfant est enregistrée sur bandes magnétoscopiques et se déroule en présence de deux expérimentateurs et de l'assistant technicien.

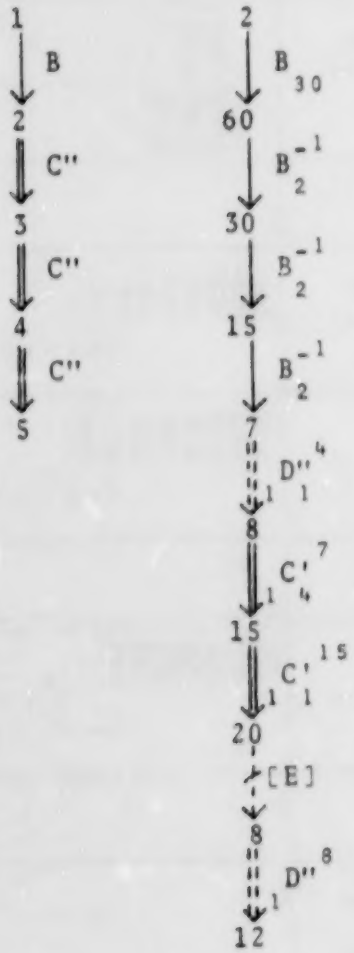
1.3 Résultats 1.3.1 Description des actions identifiées

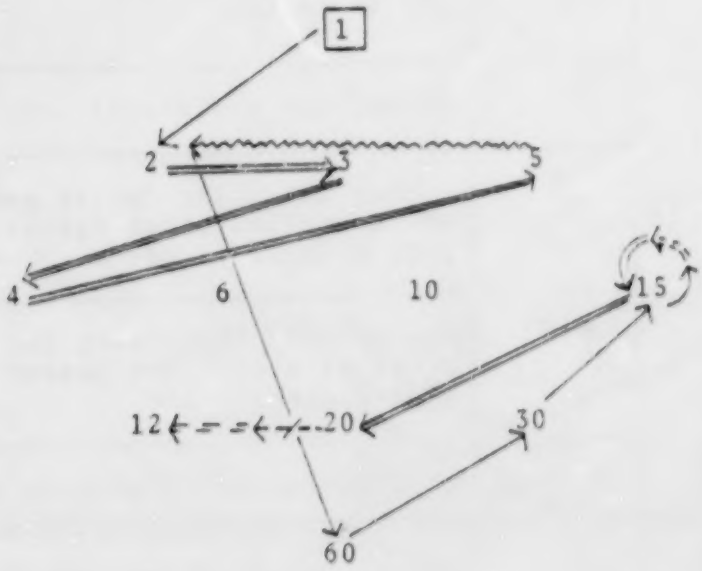
A	A	action indéterminée	
⇝	A' ⇝	action présentant une certaine régularité, différente des autres actions	
B	B_p (p>2)	empiler les piles p à la fois	
	B_2	empiler les piles 2 par 2	
	B_p^{-1} (p>2)	partager chacune des piles en p piles égales	
→	B_2^{-1}	partager chacune des piles en 2 piles égales	
	[B] ⇝	empilage ou partage imparfait	
C	$\left({}_1C_p^j\right)^n$	découper p piles en j parties de 1 jeton et reporter ces pj parties sur pj piles, ce processus étant effectué n fois (n ≥ 1)	
	$\left({}_aC_1^j\right)^n$ (a≠1)	découper 1 pile en j parties de a jetons et reporter ces j parties sur j piles, ce processus étant effectué n fois	
⇒	${}_1C'^j_p$ (p≠1)	découper p piles en j parties de 1 jeton et reporter ces pj parties sur les piles restantes dont le nombre est diviseur strict de pj	
	${}_1C'^j_1$	définition précédente avec p = 1	
	C"	distribuer un à un les jetons de la 1ère pile sur les autres piles en partant de la pile voisine, et continuer la distribution jeton par jeton avec la 2e pile, la 3e, etc., jusqu'à formation de piles égales	
	[C] ⇝	découpage imparfait	

D ==>	$a^{D''j}$ $a \neq 1$	distribuer également sur les autres piles le reste divisé en j parties de a jetons	
	$_{1}^{r,,j}$	définition précédente avec a = 1	
	D'	ôter les piles égales pour former des nouvelles piles égales à la (ou aux) pile(s) de reste	
	D	égaliser le reste avec une ou des piles et ôter les autres à la même hauteur	
	[D] -≠->	utilisation imparfaite du reste	
E -->	$a^{E}{}_{1}$ $a \neq 1$	ôter les piles par une tranche de a jetons et former de nouvelles piles égales aux piles tronquées	
	$_{1}^{E}{}_{1}$	définition précédente avec a = 1	
	E	ôter les piles égales par tranches successives d'épaisseur variable et former de nouvelles piles égales aux piles tronquées	
	[E] -≠->	ôtage imparfait	
F ···>	F	former une 1ère pile de référence, égaliser la 2e pile à cette 1ère avec les jetons de la 3e, compléter la 3e pile avec la 4e et ainsi de suite	

1.3.2 Graphe des actions identifiées pour chaque enfant

(1)





t_1 = 10/12

t_2 = 12/15

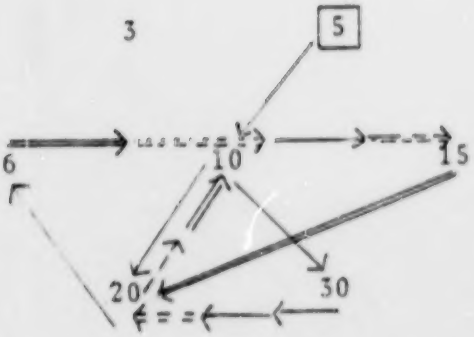
(N.B. Les définitions de t_1 et t_2 sont données à la page 43.)

(2)

5
B_2
10
B_2
20
[E]
[C]
10
B_3
30
B_4^{-1}
7
B/C
D''^{12}
20
B_3^{-1}
6
$\left({}_3C_1^2\right)^3$
9
D
7
B
D''^{4}
15
C'^{15}_1
20

1

2 3 4 12



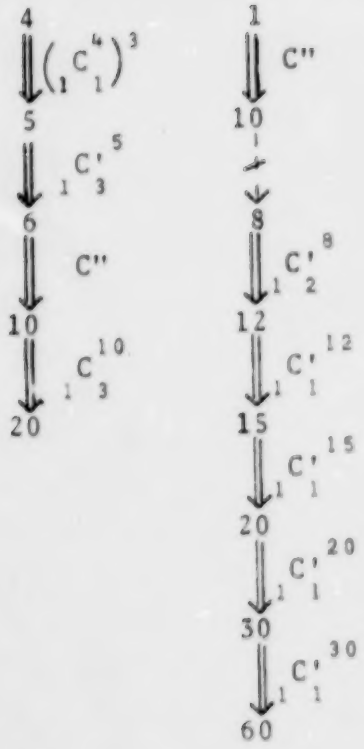
30

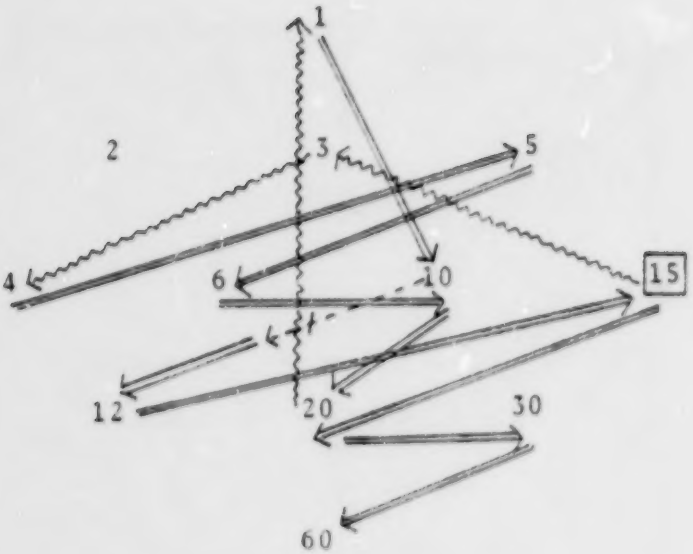
$t_1 = 6/12$

$t_2 = 9/12$

(3)

15 3

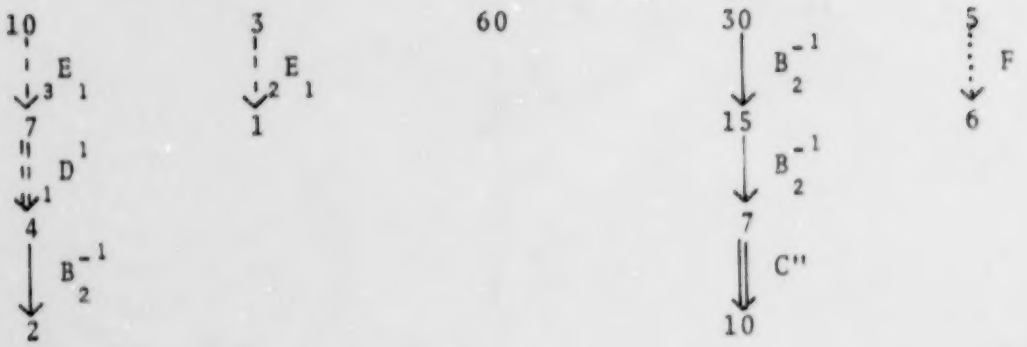


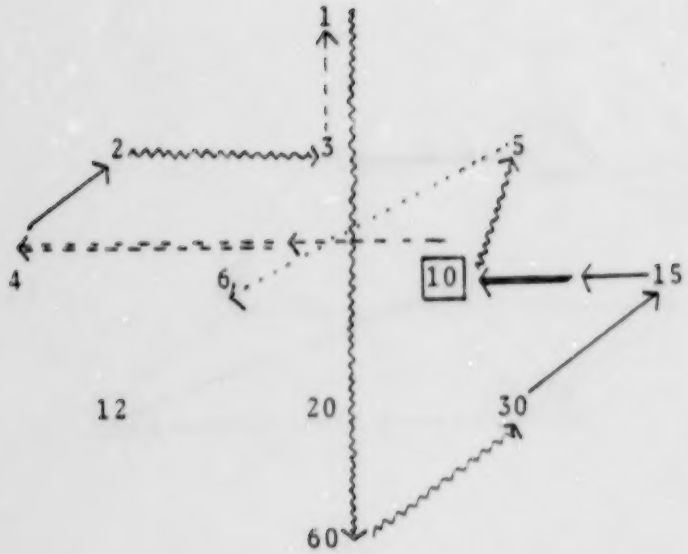


t_1 = 10/12

t_2 = 13/15

(4)

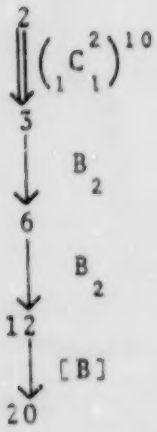




$t_1 = 10/12$

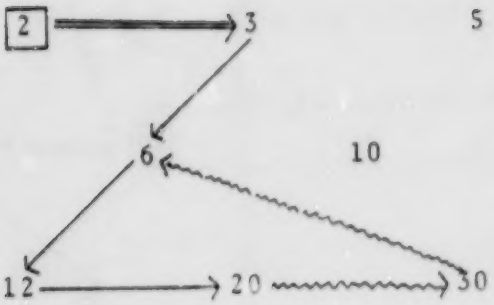
$t_2 = 11/13$

(5)



30 6

1



5 4 10 15

60

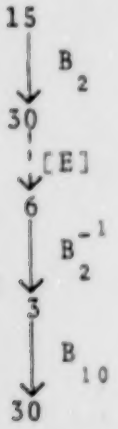
$t_1 = 6/12$

$t_2 = 7/7$

14

(6)

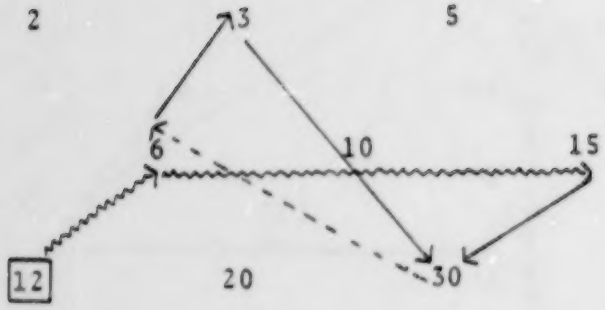
12 6



1

2 3 5

4



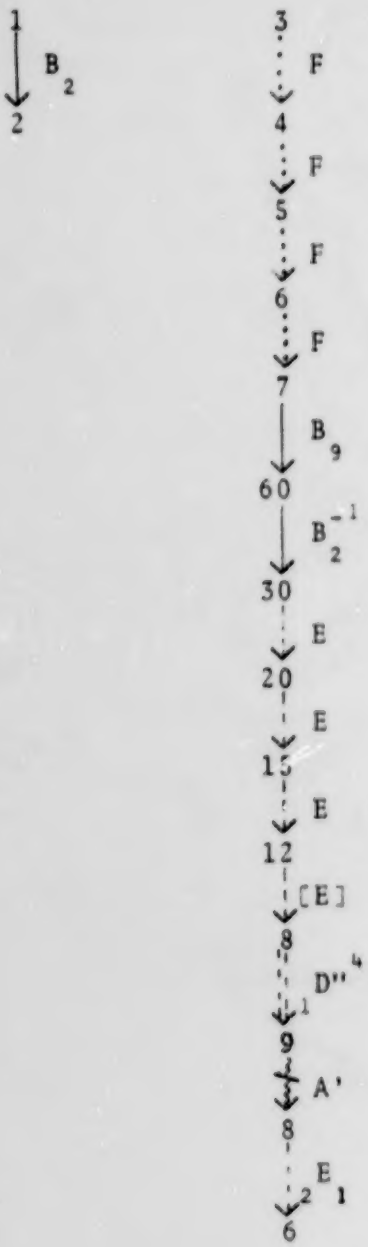
20

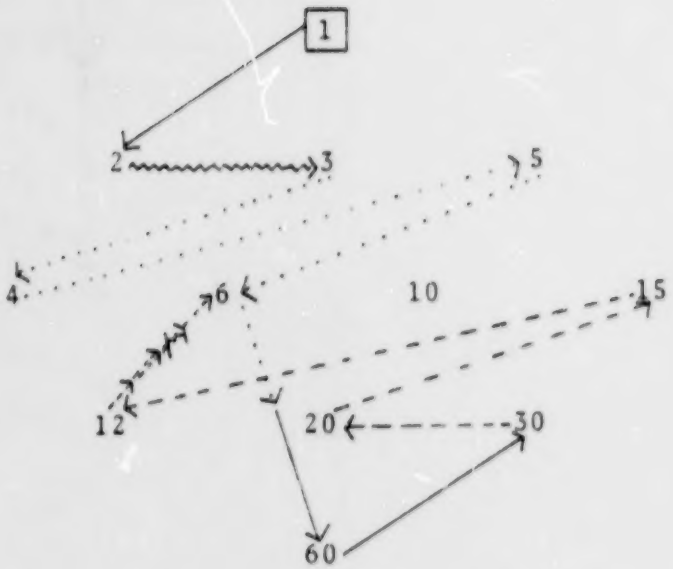
60

$t_1 = 5/12$

$t_2 = 6/7$

(7)

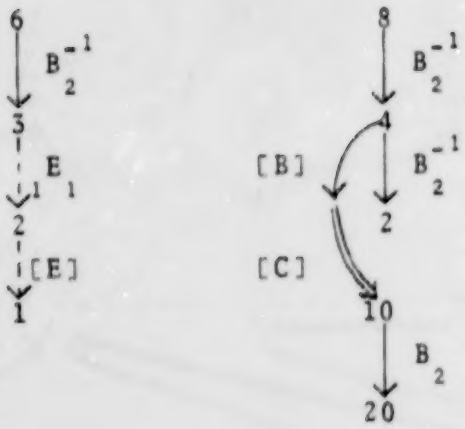


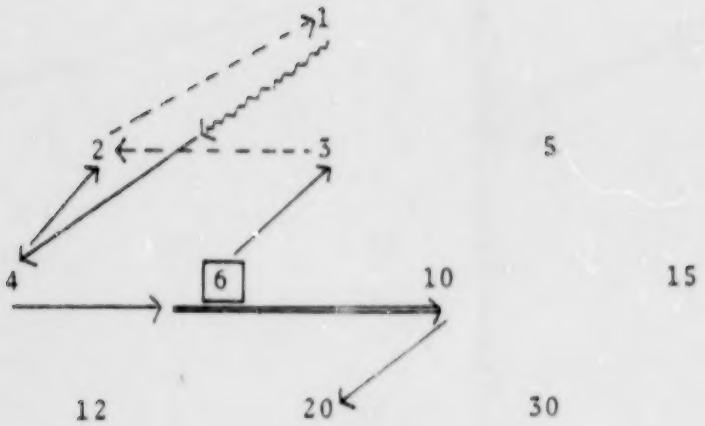


$t_1 = 11/12$

$t_2 = 12/16$

(8)





$t_1 = 7/12$

$t_2 = 8/9$

(9)

15

5 $\left({}_3E_1{}^2\right)^6$

2 $\left({}_1C_1^2\right)^{10}$

3 $\left({}_1C_1^3\right)^5$

4 $\left({}_1C_1^4\right)^3$

5 $\left({}_1C_1^5\right)^2$

6 C''

10 ${}_1C_1'^{10}$

12 ${}_1C_1'^{12}$

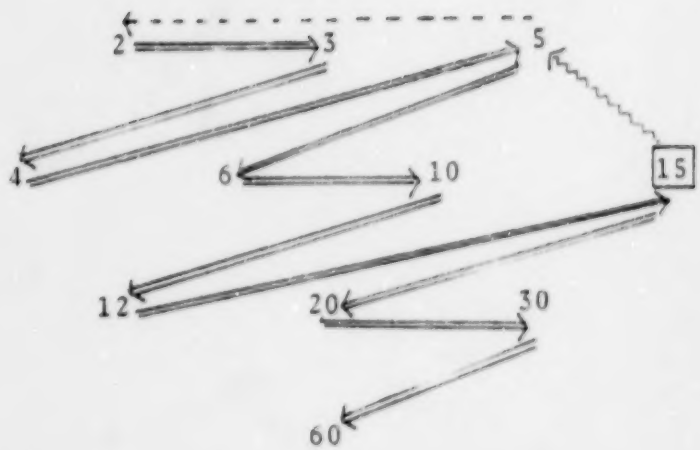
15 ${}_1C_1'^{15}$

20 ${}_1C_1'^{20}$

30 ${}_1C_1'^{30}$

60

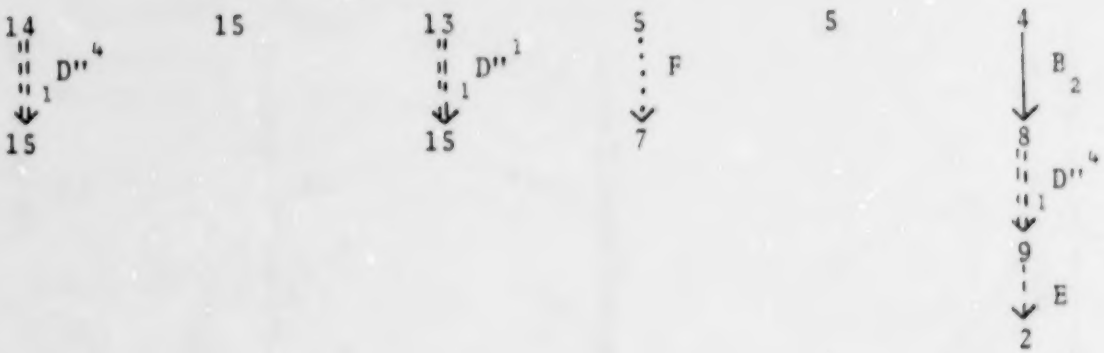
1

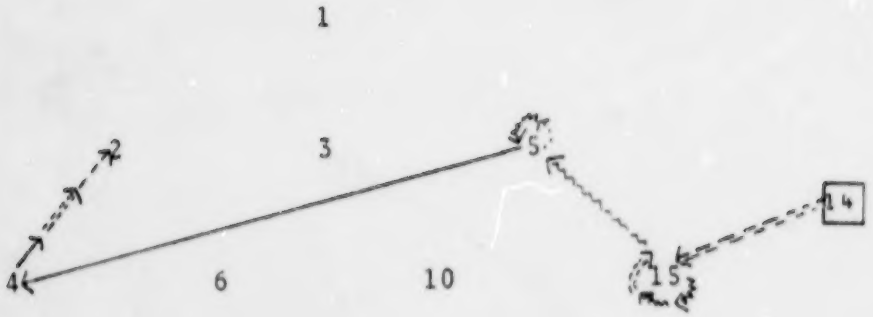


$t_1 = 11/12$

$t_2 = 13/13$

(10)

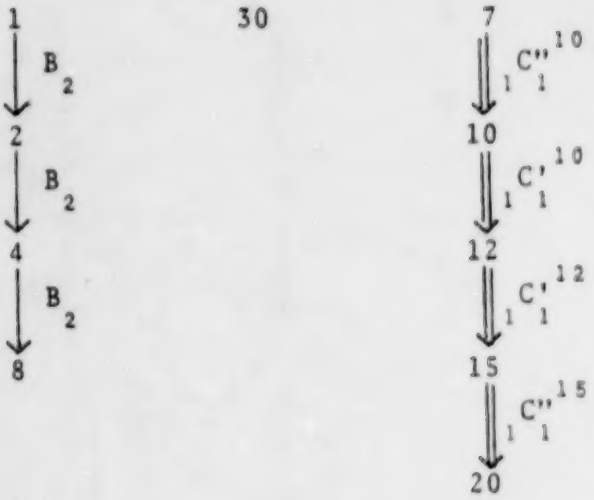


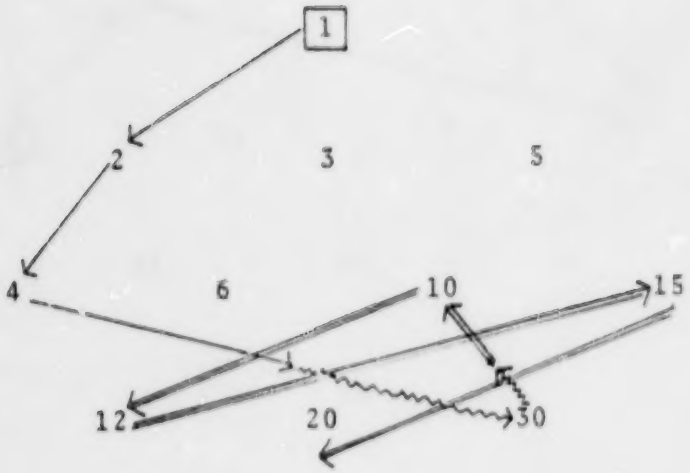


$t_1 = 4/12$

$t_2 = 7/12$

(11)





60

$t_1 = 8/12$

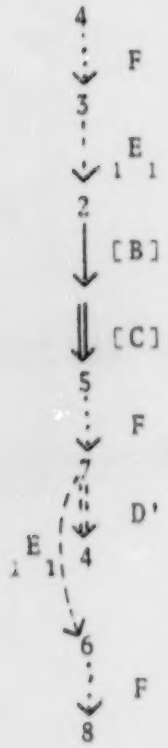
$t_2 = 8/10$

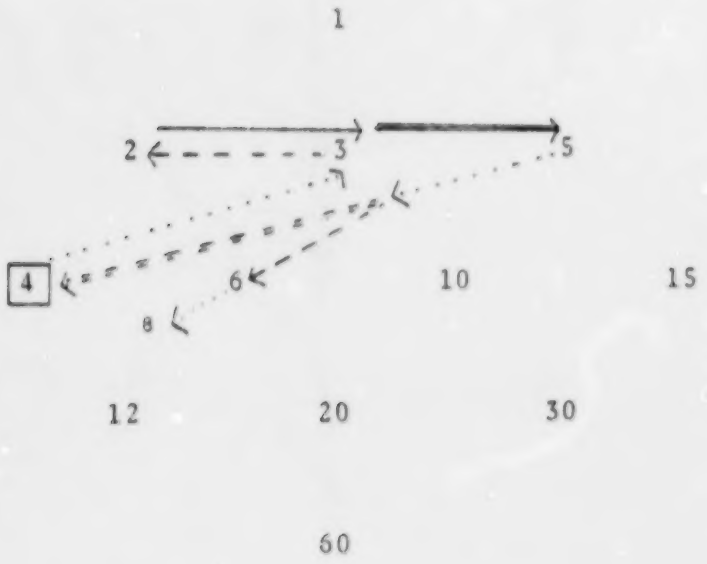
(12)

$t_1 = 5/12$

$t_2 = 8/10$

(13)

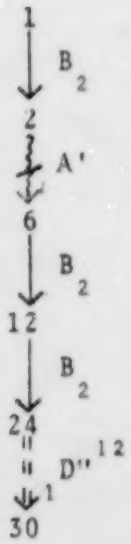


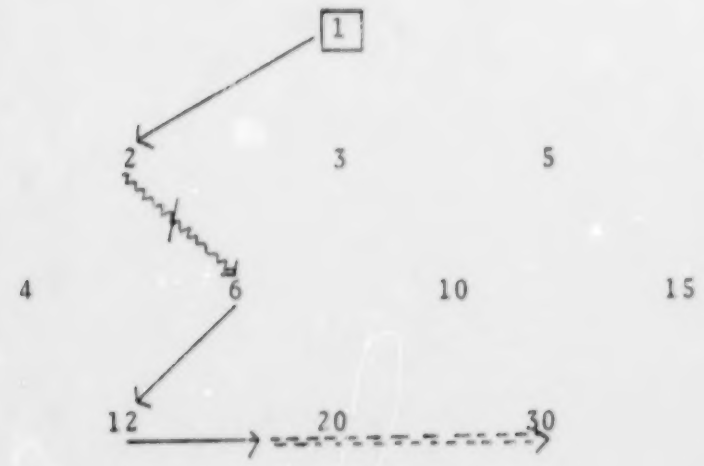


$t_1 = 5/12$

$t_2 = 6/8$

(14)





$t_1 = 5/12$

$t_2 = 5/6$

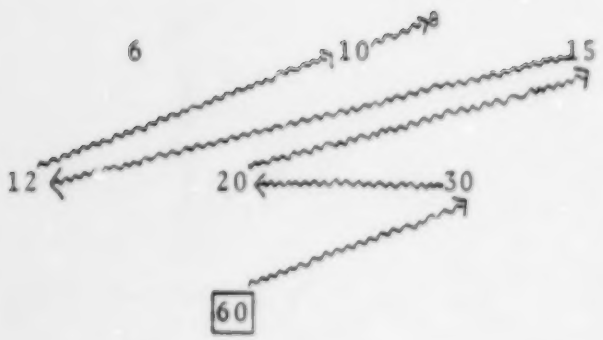
(15)

60 30 20 15 12 10 8

1

2 3 5

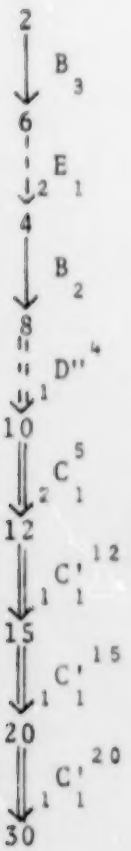
4 6



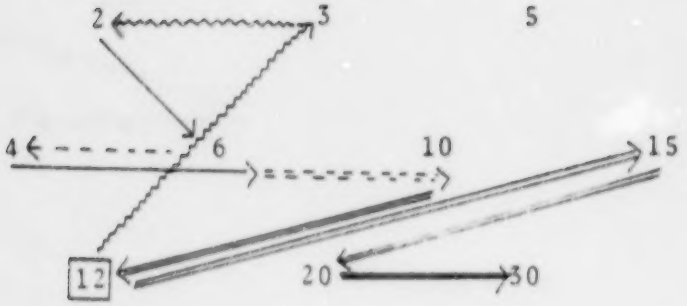
$t_1 = 6/12$

$t_2 = 6/7$

(16) 12 3



1

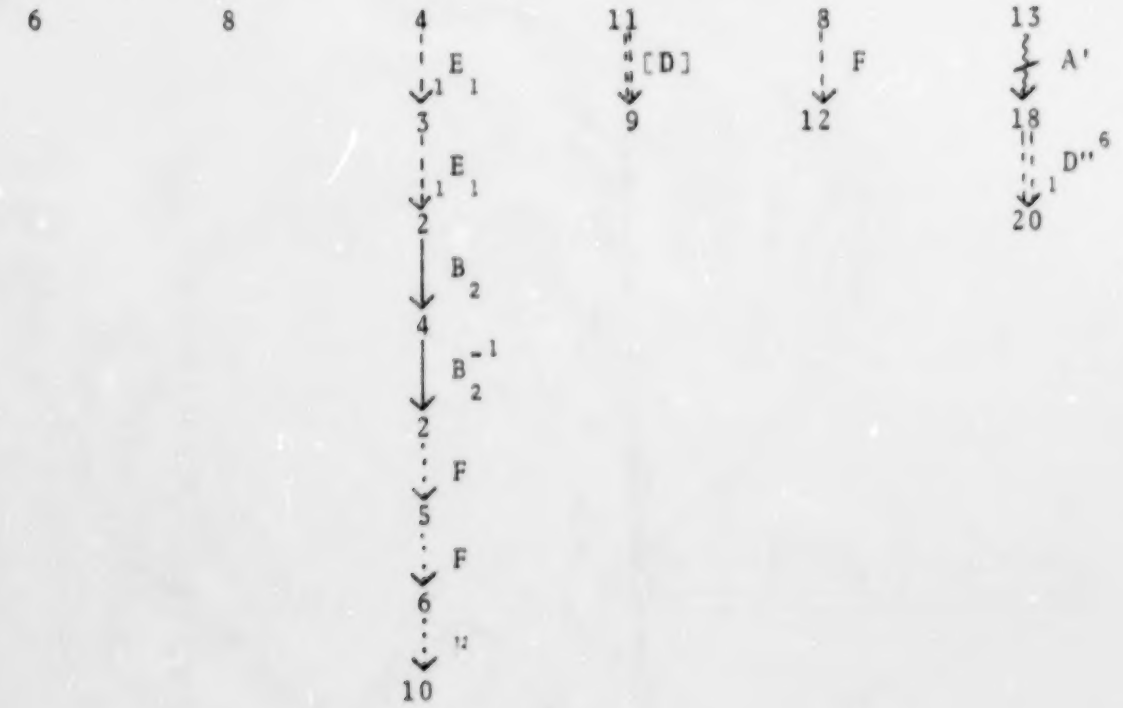


t_1 = 9/12

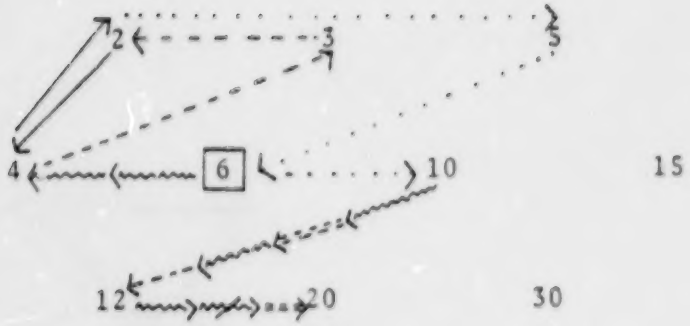
t_2 = 10/11

60

(17)



1

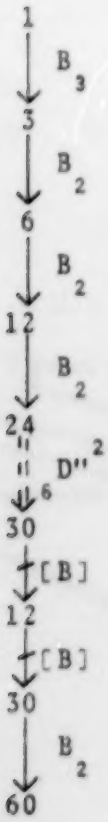


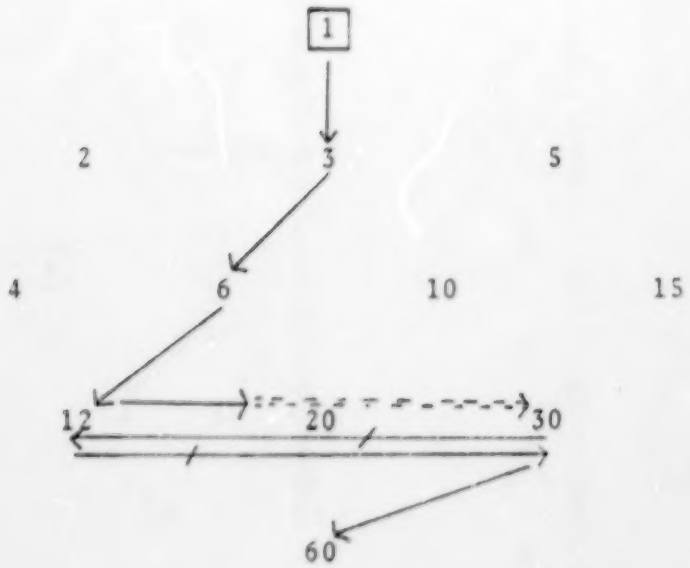
60

$t_1 = 8/12$

$t_2 = 11/17$

(18)

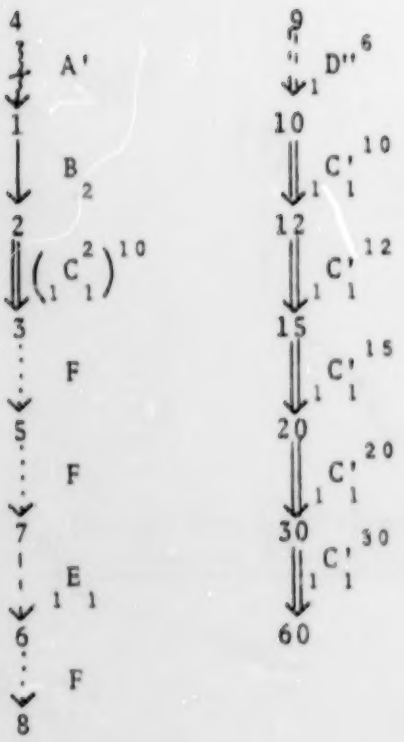


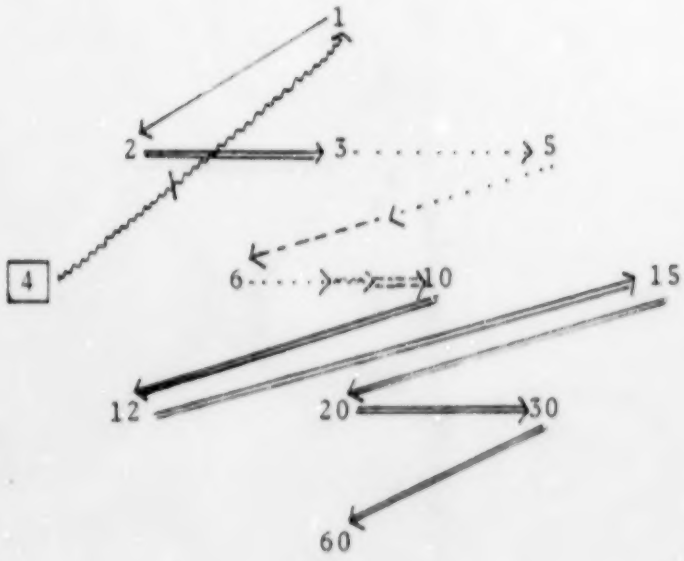


$t_1 = 6/12$

$t_2 = 8/9$

(19)

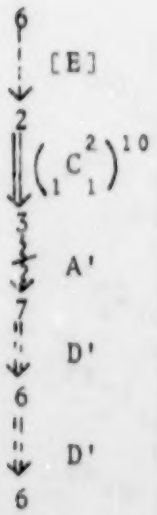


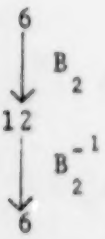


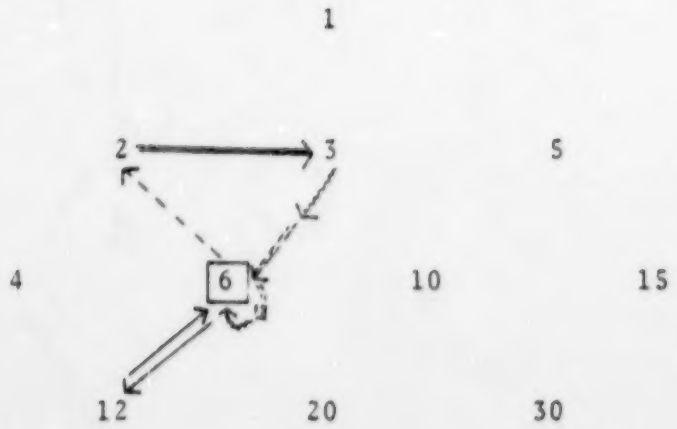
$t_1 = 12/12$

$t_2 = 12/15$

(20)



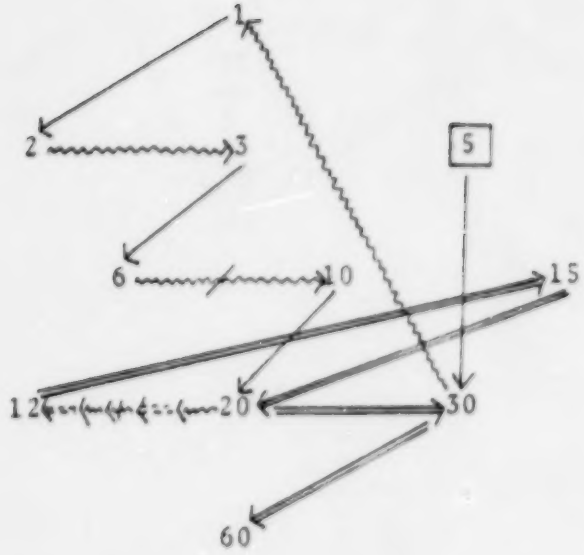




$t_1 = 5/12$

$t_2 = 8/10$

(21)

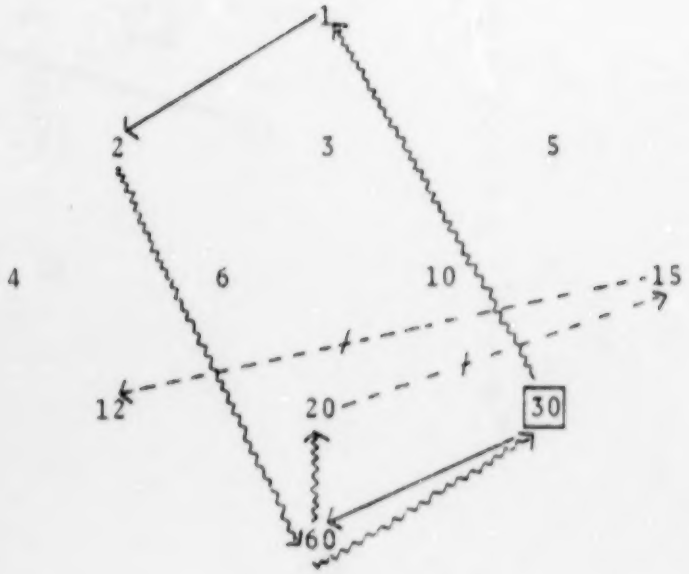


4

$t_1 = 11/12$

$t_2 = 13/17$

(22) 30 1 B_2 2 60 30 B_2 60 20 [E] 15 [E] 12

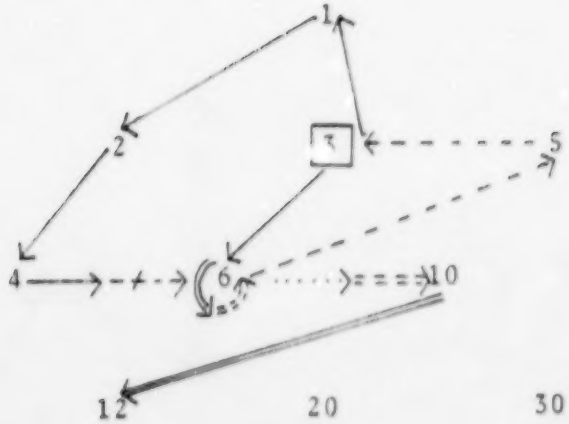


t_1 = 8/12

t_2 = 10/10

(23)

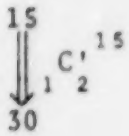
3 — B_2 — 6 — C'^{6}_{1} — 7 — D — 6 — E_1 — 5 — E — 3 — B_3^{-1} — 1 — B_2 — 2 — B_2 — 4 — B_2 — 8 — [E] — 6 — F — 9 — D''^{6}_{1} — 10 — C^{5}_{1} — 12

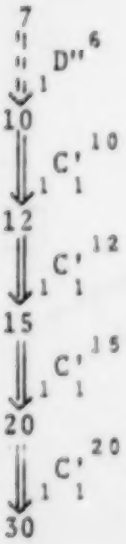


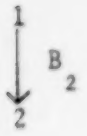
$t_1 = 8/12$

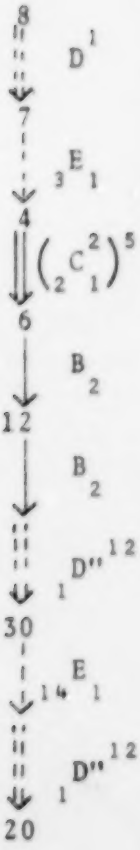
$t_2 = 11/14$

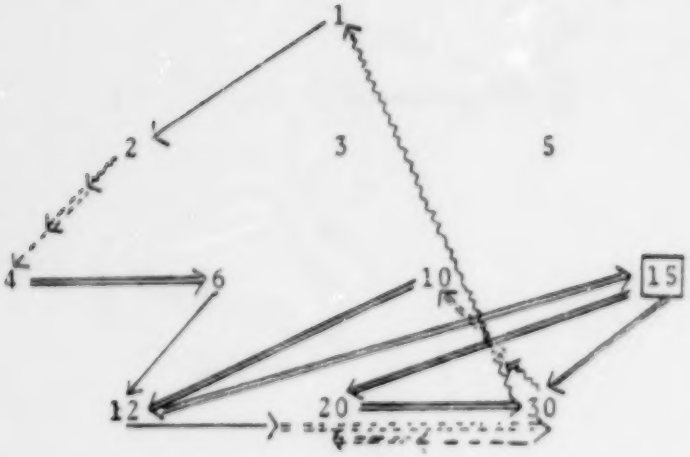
(24)







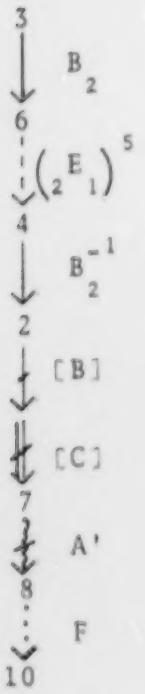


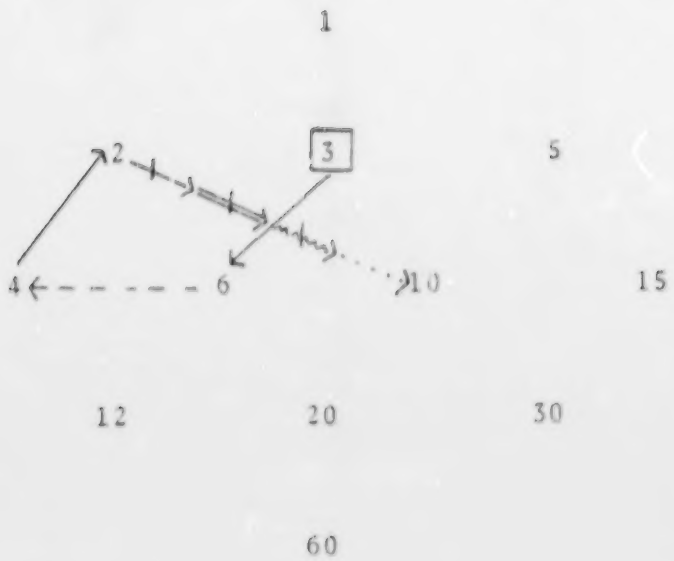


t_1 = 9/12

t_2 = 14/17

(25)

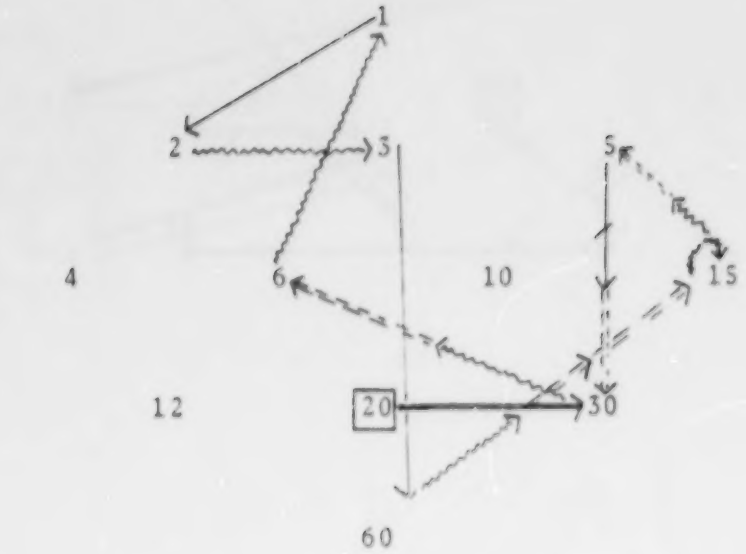




$t_1 = 6/12$

$t_2 = 6/8$

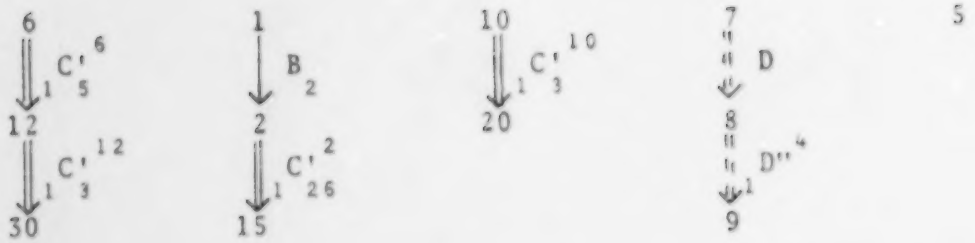
(26)

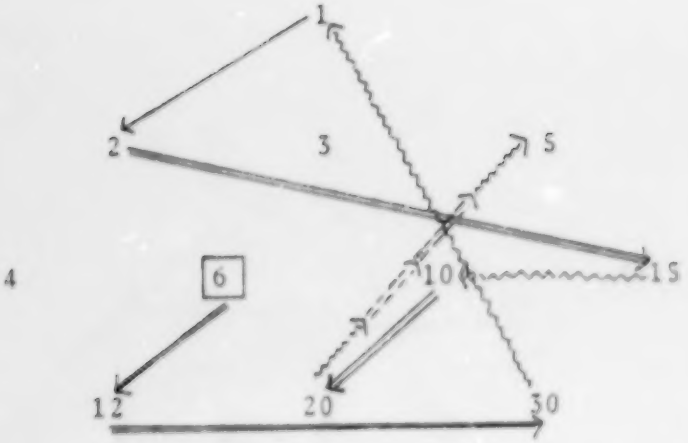


$t_1 = 9/12$

$t_2 = 11/16$

(27)



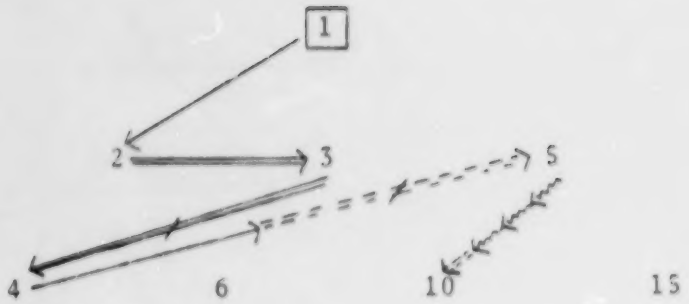


60

$t_1 = 9/12$

$t_2 = 9/12$

(28)



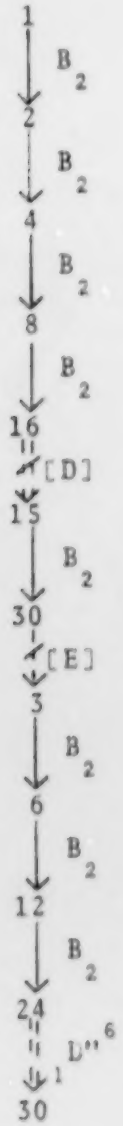
12 20 30

60

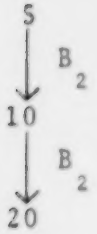
$t_1 = 7/12$

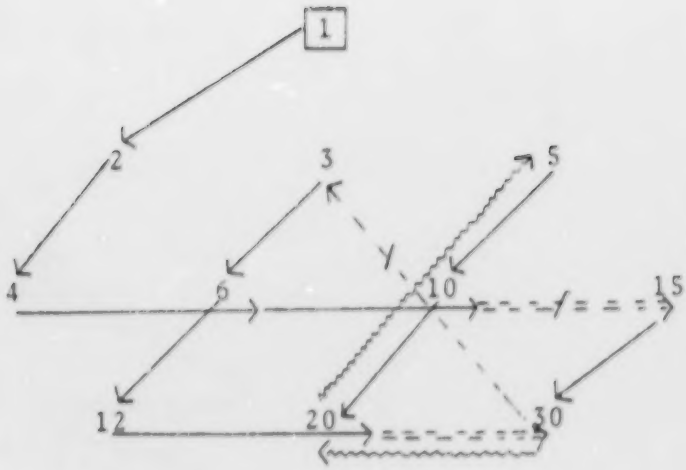
$t_2 = 7/10$

(29)



20





60

$t_1 = 11/12$

$t_2 = 13/16$

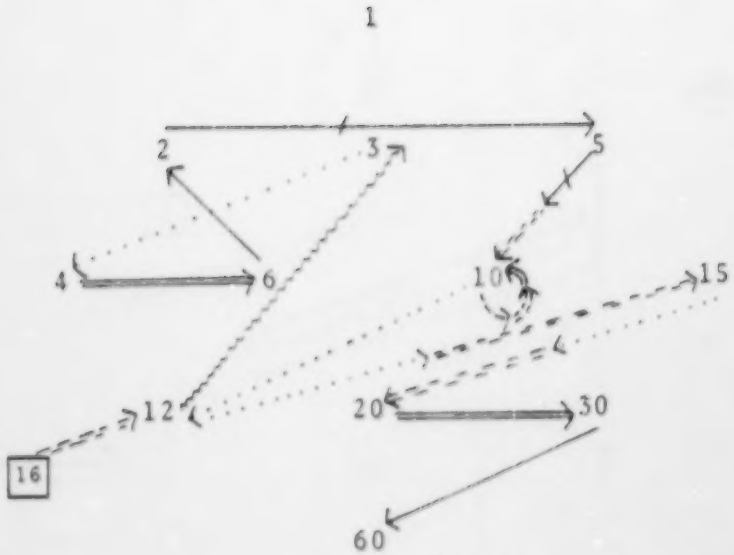
(30)

16
" D'
12

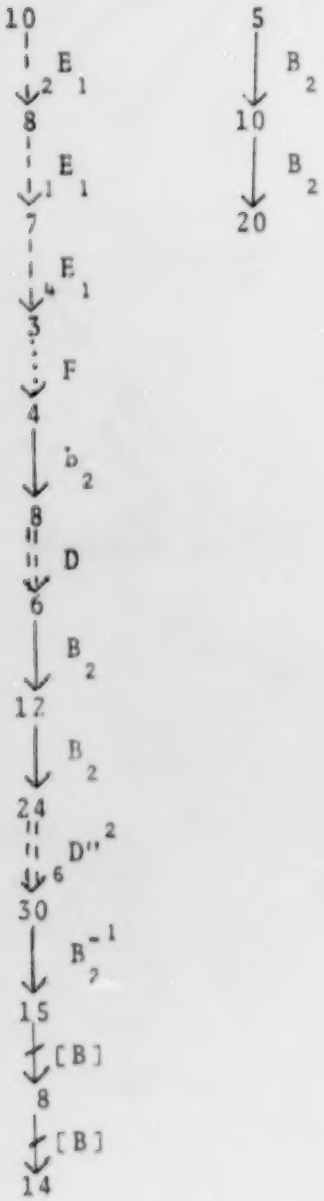
3
F
4
$\left({}_2C_1^2\right)^n$
6
1
B_3^{-1}
2
[B]
5
[B]
$_1D''^6$
10
$_2E_1$
8
$_1D''^4$
$_1C_1^8$
10
F
12
F
13
$_1D''^8$
15
F
17
$_1D''^9$
20
$_1C'^{20}_1$
30
B_2
60

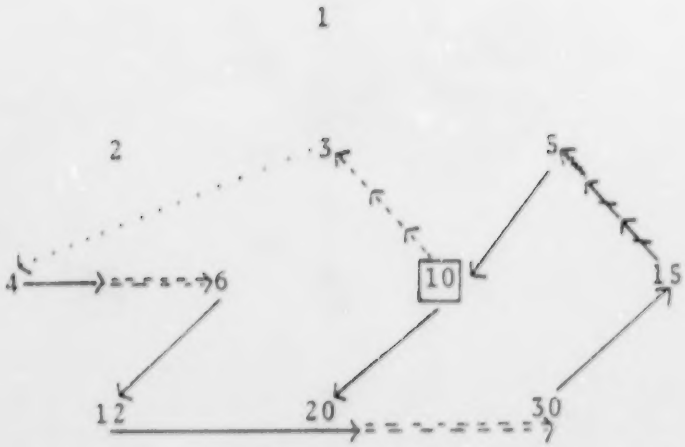
t_1 = 12/12

t_2 = 14/19



(31)



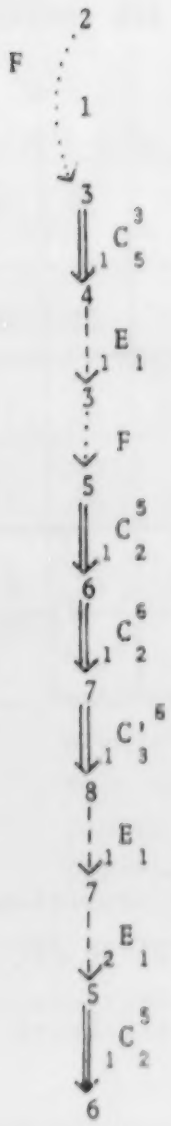


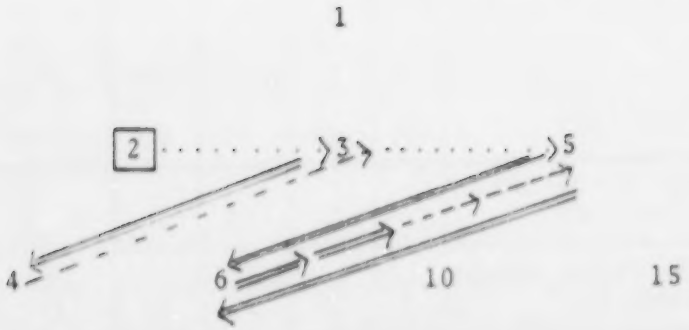
60

$t_1 = 9/12$

$t_2 = 10/16$

(32)





$t_1 = 6/12$

$t_2 = 9/12$

1.3.3 Tableaux et analyse des résultats

Tableau I: Fréquence d'atteinte des facteurs par les enfants

nombre d'enfants \ facteurs de 60	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
au total (sur 32)	21	25	23	20	20	24	21	22	21	21	24	12
de 2ième année (sur 16)	10	11	12	7	8	12	10	14	10	10	13	8
de 3ième année (sur 16)	11	14	11	13	12	12	11	8	11	11	11	4
filles (sur 16)	10	13	10	11	10	12	11	10	12	12	12	7
garçons (sur 16)	11	12	13	9	10	12	10	12	9	9	12	5

Remarques

1) Tous les facteurs, sauf 60, ont été atteints sensiblement par le même nombre d'enfants, dans une proportion des 2/3.

   Le cas de 60 s'explique aisément par la particularité de ce facteur.

2) Les enfants de 2ième année au total ont atteint 125 fois un facteur de 60, contre 129 pour les enfants de 3ième année, les résultats sont donc pratiquement identiques.

   Il n'y a pas de différence réelle entre ces deux groupes d'âge, au niveau de l'atteinte de chacun des facteurs sauf pour les facteurs 4, 12 et 60.

3) Il n'existe aucune différence significative entre les filles et les garçons en ce qui concerne chaque facteur et aussi au niveau global:

   130 fois un facteur a été atteint par les filles

   124 fois un facteur a été atteint par les garçons.

Tableau II: Taux d'utilisation des deux approches: partage - mesure

Note préliminaire

Bien que notre étude ne soit pas centrée sur ce point précis, nous avons cru bon de profiter de cette opportunité pour déterminer l'approche de la division que les enfants privilégient naturellement:

- soit celle du *partage* où on cherche à séparer un tout en parties équipotentes, ce qui se caractérise dans notre expérience par le fait que l'enfant fixe d'abord le *nombre de piles* et cherche ensuite la hauteur qu'elles vont atteindre;
- soit celle de la *mesure* où on cherche à mesurer un tout en fonction d'une de ses parties choisie comme unité de mesure, ce qui se traduit dans notre expérience par le fait que l'enfant détermine en premier lieu le *nombre de jetons* qui va composer chacune des piles et ensuite il cherche le nombre de piles de cette hauteur.

Voici les résultats obtenus en considérant la totalité des essais (389)

	2ième année	3ième année	filles	garçons	pour l'ensemble
partage	0.4	0.25	0.38	0.26	0.32
mesure	0.6	0.75	0.62	0.74	0.68

Remarques

1) L'approche mesure est plus utilisée (68%) que celle du partage (32%), ce qui confirme ce qui avait été trouvé dans nos étapes précédentes.

Sur un plan didactique ce résultat n'est pas à négliger puisqu'il va à l'encontre de ce qui se fait habituellement dans les classes, puisque ordinairement la division est présentée sous l'aspect du partage et très rarement sous celui de la mesure.

2) Les enfants de 3ième année ont plus privilégié l'approche mesure: 75%, que ceux de 2ième année: 60%. Ceci confirme également les résultats antérieures.

3) Les garçons ont choisi l'approche mesure dans une proportion plus grande que les filles: 76% contre 62%; l'écart n'est pas toutefois très grand.

Tableau III: Taux de réussite et d'efficacité

Nous définissons pour chaque enfant un taux de réussite t_1 et un taux d'efficacité t_2 de la manière suivante:

$$t_1 = \frac{\text{nombre de facteurs atteints (sans les répétitions)}}{\text{nombre de facteurs de 60 (c'est-à-dire 12)}}$$

$$t_2 = \frac{\text{nombre de facteurs atteints (avec les répétitions)}}{\text{nombre total d'essais}}$$

A noter aussi que tout essai aboutissant à un non-facteur de 60 a été classé comme *erreur*.

	moyenne 2ième	moyenne 3ième	moyenne filles	moyenne garçons	moyenne générale
t_1	.65	.67	.68	.65	.66
t_2	.84	.76	.80	.80	.80
nombre d'essais	11.6	12.7	12.4	11.9	12.15
nombre d'erreurs	2.1	3.1	2.6	2.5	2.55

Remarques

1) Le taux général de réussite 66% est assez bon, mais celui d'efficacité 80% est tout à fait remarquable: il signifie que globalement dans 8 essais sur 10 un enfant a trouvé un facteur de 60. Ce résultat doit toutefois être atténué par le fait que nous ayons choisi un nombre très riche en diviseurs.

2) Il n'y a pas de différence significative entre les enfants de 2ième année et ceux de 3ième année ni entre les garçons et les filles en ce qui concerne t_1 et aussi t_2.

   On peut remarquer cependant que les enfants de 2ième ont été sensiblement plus efficaces que ceux de 3ième année (.84 contre .76) tout en ayant un taux de réussite légèrement moindre (.65 contre .67). On peut y trouver une explication dans le fait que ceux de 2ième ont fait moins d'essais en moyenne que ceux de 3ième (11.6 contre 12.7) et partant de là moins d'erreurs (2.1 contre 3.1).

Tableau IV: Répartition des actions

Note: A côté de chaque numéro d'enfant figurent ses caractéristiques, exemple F_2 : filles de 2ème année.

		A	A'	$\mathcal{A}$	B_p	B_2	B_p^{-1}	B_2^{-1}	(B)	$\mathcal{B}$	$({}_1C_p^j)^n$	$({}_2C_1^j)^n$	${}_1C_p^j$	${}_1C_1^j$	C^n	(C)	$\mathcal{C}$	${}_2D^{n-1}$	${}_1D^{n-1}$	D^n	D	(D)	$\mathcal{D}$	${}_2E_1$	${}_1E_1$	E	(E)	$\mathcal{E}$	F ou $\mathcal{F}$
1	F_2	1			1	1		3					1	1	3				2							1		
2	F_2				1	6	2					1		1		1			2		1					1		
3	F_2	3									1		3	4	2											1		
4	F_2	4						3							1					1				2				1
5	G_2	2				2			1		1																	
6	G_2	2			1	1		1																		1		
7	F_1	1	1		1	1		1											1					1		3	1	4
8	F_1	1				1		3	1							1									1		1	
9	F_1	1									4			1	1									1				
10	F_1	5				1													3							1		1
11	G_1	2				3								3	1													
12	G_1	1			1			1	1					2		2										1		
13	G_1								1							1				1					2			3
14	F_2		1			3													1									
15	F_2	6																										
16	F_2	2			1	1						1		5					1					1				
17	F_2	5	1			1		1											1			1				2		4
18	G_2				1	4			2									1										
19	G_2	1	1			1					1			5					1							1		5
20	G_2	1	1			1		1			1									2							1	
21	G_2	4	2		1	3								4					1		1							
22	G_2	4				2																					2	
23	G_2					4	1					1	1						1		1				1	1	1	1
24	F_1	3				3						1	1	4					3	1				2				
25	F_1		1			1		1	1							1								1				1
26	F_1	5			1	1		1	1					1					2	3								
27	F_1	4				1							4						1			1						
28	G_1	3				2					1					1			1			1						
29	G_1	2				10												1				1					1	
30	G_1	1				1	1		2		1	1		1					4	1				1				1
31	G_1	1				5		1	2									1			1			2	1			1
32	G_1										4		1											1	2			2
(1)		25	7	27	9	25	3	11	9	28	8	5	6	12	5	6	22	3	15	6	4	4	21	9	7	4	10	13	11
(2)		65	8	73	9	58	4	17	12	100	14	5	11	34	8	7	79	3	25	9	4	4	45	12	10	6	11	34	15

(1): nombre d'enfants qui ont utilisé l'action au moins 1 fois.

(2): nombre de fois que l'action a été utilisée, au total.

Remarques

1) Si on considère les classes d'actions, on constate que mise à part la classe $\mathcal{F}$, toutes les autres classes ont été touchées par au moins les 2/3 des enfants, et seulement 4 enfants sur 32 n'ont pas accompli d'actions de la classe $\mathcal{B}$.

Par ailleurs ce sont les actions de la classe $\mathcal{B}$ qui ont été les plus utilisées (27.7% du total) puis celles de la classe $\mathcal{C}$ (21.9% du total). Les actions de la classe $\mathcal{A}$ représentent 20.2% du total ce qui est en nette diminution par rapport aux expériences antérieures et qui répond ainsi à un des objectifs que l'on s'était fixés pour cette étape à savoir d'identifier le plus possible les actions A et A'.

2) En ce qui concerne les actions elles-mêmes (exception faite de A), on remarque que celles utilisées par le plus d'enfants ont été dans l'ordre: B_2 (25 enfants), ${}_1D''^j$ (15 enfants), ${}_1C'^j_1$ (12 enfants), B_2^{-1} (11 enfants), F et [E] (10 enfants) et pour celles réalisées le plus souvent on obtient: B_2 (58 fois), ${}_1C'^j_1$ (34 fois), ${}_1D''^j$ et F (25 fois), B_2^{-1} (17 fois).
Il est intéressant de noter que les actions B_2 et ${}_1C'^j_1$, et, à un degré moindre, ${}_1D''^j$ ont souvent été utilisées plusieurs fois par un même enfant.

3) Si on cherche à faire une comparaison entre les enfants de 2ième année et ceux de 3ième année, on pourra remarquer qu'il n'y a pratiquement aucune différence, si ce n'est un pourcentage plus fort d'actions de la classe $\mathcal{A}$ pour les enfants de 2ième année (24.1% du total) que pour ceux de 3ième année (16.8% du total), résultat auquel on pouvait s'attendre, vu la différence d'âge.

Pour ce qui est des garçons et des filles, là aussi globalement les résultats sont semblables. On peut remarquer toutefois à l'avantage des garçons un pourcentage moins élevé de A (14% contre 21.7%) et plus élevé de B_2 (22.7% contre 10.1%).

Tableau V : Participation des actions dans l'atteinte des facteurs

pourcentage de chaque action	nombre d'actions	type d'actions	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
16.4	46	A	6	2	7	3	7	2	3	1	4	3	6	2
1.1	3	A'	1					1	1					
17.5	49	$\mathcal{A}$	7	2	7	3	7	3	4	1	4	3	6	2
3.2	9	B_p			1			1				1	5	3
16.4	46	B_1		13		4		6	3	7	1	6	3	3
1.1	3	B^{2-1}_p	1	1				1						
5.0	14	B^{2-1}_2		4	2	1	1	1			3		2	
2.1	6	[B]					2		1	1		1	1	
27.8	78	$\mathcal{B}$	1	18	3	5	3	9	4	8	4	6	9	6
4.6	13	$({}_1C^j_p)^n$			5	2	2	3	1					
1.4	4	$({}_aC^j_1)^n$						2		2				
2.9	8	${}_1C^{i-j}_p$								2	2	2	2	
11.8	33	${}_1C^{i-j}_1$							1	4	7	9	8	4
2.9	8	C''			1	1	1		5					
2.1	6	[C]				1	1		2		1		1	
25.7	72	$\mathcal{C}$			6	4	4	5	9	8	10	11	11	4
1.1	3	${}_aD^{i-j}$											3	
7.5	21	${}_1D^{i-j}$							7	2	5	4	3	
2.1	6	D'				2	1	2		1				
0.7	2	D						2						
6.7	2	[D]					1				1			
12.1	34	$\mathcal{D}$				2	2	4	7	3	6	4	6	
3.2	9	${}_aE_1$	1	1	1	3	1	1				1		
2.9	8	${}_1E_1$		3	2		1	2						
2.1	6	E		1	1					1	1	2		
2.9	8	[E]	1	1	1			2	1	1	1			
11.1	31	$\mathcal{E}$	2	6	5	3	2	5	1	2	2	3		
5.7	16	F			2	3	4	3	2	2				
100	280		10	26	23	20	22	29	27	24	26	29	12	12

Remarques

Ce sont les actions des classes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ qui ont été les plus employées avec des pourcentages respectifs de 27.8% et 25.7%, les actions de la classe $\mathcal{A}$ ne représentant que 17.5% du total, ce qui est relativement peu.

A noter que les actions B_2, C'^j_1 et D''^j_1 sont les plus nombreuses et qu'elles ont permis d'atteindre principalement les facteurs supérieurs à 6. Par contre, on ne peut guère retenir d'action qui caractérise en quelque sorte les petits facteurs, car on ne peut retenir les 13 B_2 pour l'atteinte de 2 étant donné que dans ce cas particulier ce sont des actions peu significatives (passage de 1 jeton à 2 jetons). On peut remarquer cependant que les actions de la classe $\mathcal{E}$ et principalement $E_{1\,1}$, sont surtout concentrées sur les petits facteurs: 23 cas sur 31 pour les facteurs inférieurs ou égal à 6. Ceci se comprend aisément lorsqu'on se réfère à la caractéristique de $\mathcal{E}$, qui est l'étêtage.

Tableau VI: Répartition des actions dans la formation des erreurs

classe $\mathcal{A}$	classe $\mathcal{B}$	classe $\mathcal{C}$	classe $\mathcal{D}$	classe $\mathcal{E}$	classe $\mathcal{F}$
19 A	0 B_p	1 $\left({}_1C_p^j\right)^n$	0 ${}_aD''^j$	3 ${}_aE_1$	9 F
5 A'	12 B_2	1 $\left({}_aC_1^j\right)^n$	4 ${}_1D''^j$	2 ${}_1E_1$	
	1 B_p^{-1}	3 ${}_1C'^j_p$	3 D'	0 E	
	3 B_2^{-1}	1 ${}_1C'^j_1$	2 D	3 [E]	
	6 [B]	0 C''	2 [D]		
		1 [C]			
24	22	7	11	8	9
29.6%	27.2%	8.6%	13.6%	9.9%	11.1%

Remarques

Afin de mieux pouvoir établir des comparaisons avec ce qui précède, nous résumons dans un tableau récapitulatif, les principaux résultats concernant la distribution des actions.

Tableau VII: Tableau récapitulatif de la participation des actions

		A	B	C	D	E	F	
dans l'atteinte des facteurs	total	49	78	72	34	31	16	280
	%	17.5	27.89	25.7	12.1	11.1	5.7	100%
dans la formation des erreurs	total	24	22	7	11	8	9	81
	%	29.6	27.2	8.6	13.6	9.9	11.1	100%
pour tous les essais	total	73	100	79	45	39	25	361
	%	20.2	27.7	21.9	12.5	10.8	6.9	100%

On peut déduire de ce tableau le rendement de chaque classe d'actions dans l'atteinte des facteurs, défini ainsi:

$\frac{\text{nombre d'actions qui atteignent des facteurs}}{\text{nombre total d'actions de la classe}}$; on obtient

ainsi:

	A	B	C	D	E	F
rendement	.67	.78	.91	.76	.79	.64

1) On voit immédiatement que ce sont les actions de la classe C qui donnent le meilleur rendement: 91% d'entre elles ont permis de trouver un facteur. Ce résultat peut s'expliquer par le choix de 60 comme nombre étudié et qui se prête assez bien aux actions de ce type (surtout $C'^{j}_{i\,i}$).

Ensuite, les actions des classes B, D et E offrent un rendement semblable mais qui demeure cependant

supérieur à celui de la classe $\mathcal{A}$ ce qui est quand même assez significatif.

Le rendement de la classe $\mathcal{F}$ est inférieur à celui de la classe $\mathcal{A}$ mais il faut tenir compte du fait que ce résultat peut être légèrement faussé du fait du petit nombre d'actions (25) figurant dans la classe $\mathcal{F}$.

Remarquons également (tableau VII) que le pourcentage des actions de la classe $\mathcal{B}$ reste pratiquement constant, que ce soit dans l'atteinte des facteurs ou dans la formation d'erreurs. Cela reste vrai à un degré moindre pour les classes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$.

2) Si on s'intéresse aux erreurs les plus fréquentes commises par les enfants, on peut se rendre compte que dans 62% des cas (50 des 81 actions recensées) ce sont les nombres 7 et 8, ce qui se comprend assez bien: 7 et 8 étant les plus petits entiers qui ne soient pas des diviseurs de 60 et, en outre, 8 est le double de 4, ce qui occasionne une erreur pour l'utilisateur de B_2.

Les autres erreurs sont réparties sur les nombres suivants par ordre décroissant: 9, 24, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 22, 23.

Tableau VIII: Répartition des actions qui suivent une erreur

Note préliminaire

Afin de savoir comment était "corrigé" une erreur, nous avons cru bon de rechercher les actions qui faisaient immédiatement suite à une erreur. Nous en avons dénombré 83, réparties ainsi:

classe $\mathcal{A}$	classe $\mathcal{B}$	classe $\mathcal{C}$	classe $\mathcal{D}$	classe $\mathcal{E}$	classe $\mathcal{F}$
10 A	1 B_p	1 $\left({}_1C_p^j\right)^n$	3 ${}_aD''^j$	4 ${}_aE_1$	2 F
4 A'	3 B_2	0 $\left({}_aC_1^j\right)^n$	23 ${}_1D''^j$	3 ${}_1E_1$	
	0 B_p^{-1}	3 ${}_1C'^j_p$	9 D'	1 E	
	1 B_2^{-1}	2 ${}_1C'^j_1$	4 D	1 [E]	
	1 [B]	3 C''	4 [D]		
		0 [C]			
14	6	9	43	9	2
16.9%	7.2%	10.8%	51.8%	10.8%	2.4%

Comme il fallait s'y attendre, on constate que c'est la classe $\mathcal{D}$ qui domine (utilisation du reste) avec près de 52% du total des actions et en particulier l'action ${}_1D''^j$ qui consiste à distribuer le reste sur les autres piles, jeton après jeton.

Pour savoir si le fait d'avoir accompli une erreur a conduit à plus grande justesse par la suite de la part des enfants, on peut comparer les résultats suivants:

- sur les 280 actions dénombrées au total 81 conduisent à des erreurs;
- sur les 83 actions qui suivent des erreurs, 24 mènent à de nouvelles erreurs.

Or si on calcule le rapport $\frac{\text{erreurs}}{\text{actions}}$ dans les deux cas, on trouve des résultats pratiquement identiques (au millième près): $\frac{81}{280} \simeq \frac{24}{83} \simeq .29$!

En outre, sur les 43 actions de la classe $\mathcal{D}$ qui suivent des erreurs, 11 d'entre elles conduisent à nouveau à des erreurs, soit une proportion de 26%, ce qui est assez semblable au résultat global.

On ne peut donc pas dire que les erreurs produites ont conduit les enfants à e.. faire moins par la suite, ni que l'utilisation des actions de la classe $\mathcal{D}$ s'avère fructueuse dans ce sens; si on se base sur ces résultats.

Tableau IX: Répartition des actions suivant les nombres qu'elles relient

Note préliminaire

Nous cherchons principalement à savoir ici quelles actions un enfant a utilisées pour passer d'un facteur particulier à un autre facteur bien déterminé. Nous avons ajouté les nombres 7, 8, 9, vu que les enfants arrivaient assez souvent sur ces nombres.

Dans chaque case du tableau figurent les actions qui ont permis de passer du nombre "horizontal" au nombre "vertical". On y indique aussi le nombre de fois que chaque action a été utilisée.

Tableau IX: Répartition des actions suivant les nombres qu'elles relient

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60
1		15 B_2	1 B_3 1 F					1 A		1 C"					1 A
2	1 (E)		4 A 5 $\left(C^2_{1\ 1}\right)^{10}$ 1 C"	4 B_2	2 (B) 1 (D) 1 F	1 A' 1 B_3	1 A 1 (B) 1 (C)					1 $C'^{2}_{1\ 26}$			1 A 1 B_{30}
3	1 B_3^{-1} 2 $E_{2\ 1}$	1 A 1 $E_{1\ 1}$		1 A 1 (C) 2 $\left(C^2_{1\ 1}\right)^5$ 1 C^3_5 1 C" 3 F	2 F	6 B_2	1 A'							1 B_{10}	1 B_{20}
4	1 A'	4 B_2^{-1}	2 $E_{1\ 1}$ 1 F	1 $E_{3\ 1}$	2 $\left(C^5_{1\ 1}\right)^3$ 1 C" 1 F	1 $\left(C^2_{2\ 1}\right)^5$ 1 $\left(C^2_{2\ 1}\right)^n$		7 B_2		1 (B) 1 (C)					
5		1 A 1 $E_{3\ 1}$	1 E	1 A		2 $C^5_{1\ 2}$ 1 $\left(C^5_{1\ 1}\right)^2$ 3 F	1 $C'^{5}_{1\ 3}$ 3 F	1 A	1 (B)	3 B_2			1 B_4	1 B_6	
6	1 A	1 B_1^{-1} 1 (E)	2 B_2^{-1}	2 $E_{2\ 1}$	1 $E_{1\ 1}$		1 C^6_2 1 C'^{6}_{2} 1 F	1 A 1 C^6_3 2 F	1 $\left(C^2_{3\ 1}\right)^3$ 1 F	1 A' 1 C" 1 F	7 B_2 1 $C'^{6}_{1\ 5}$				
7			1 $E_{4\ 1}$	2 D'	1 A 1 $E_{2\ 1}$	2 $E_{1\ 1}$ 1 D	2 D'	1 A' 1 $C'^{7}_{1\ 1}$ 1 D'^{5}_{1} 1 (D)	1 A'	2 C"		1 B_2 1 D'^{5}_{1}	1 B_2 1 D'^{12}_{1}		1 B_5

8				1 A 1 B_2^{-1}	1 D' 1 [D]	1 D 1 $E_{2\,1}$ 1 [E]	1 D 2 $E_{1\,1}$		1 A 3 $D'^{\,4}_{1}$	1 $C'^{\,9}_{1\,1}$ 1 $D'^{\,4}_{1}$ 1 F	1 $C'^{\,8}_{1\,2}$ 1 $D'^{\,8}_{1}$ 1 F	1 $C'^{\,7}_{1\,4}$		2 A	
9		1 E			1 A		1 D	1 A 1 A'		1 $C^{\,6}_{1\,1}$ 1 $D'^{\,6}_{1}$ 3 $D'^{\,6}_{1}$					
10					1 A 1 F_2^{-1}	1 A	1 $E_{3\,1}$	1 A 1 $E_{2\,1}$ 1 [E]			4 $C'^{\,10}_{1\,1}$ 2 $C^{\,5}_{2\,1}$ 1 F	1 [C]	5 B_2 2 $C'^{\,10}_{1\,3}$	1 B_3	
12			2 A			1 B_2^{-1}		1 [E]		1 A		7 $C'^{\,12}_{1\,1}$	1 [B]	1 [B] 4 B_2 1 $D'^{\,12}_{1\,1}$ 1 $C'^{\,12}_{1\,2}$	
15			1 A		2 A		2 B_2^{-1} 1 [B]	1 B_2^{-1} 1 [B]		1 A	1 A 1 E 1 [E]	2 A	9 $C'^{\,15}_{1\,1}$	2 B_2 1 $C'^{\,15}_{1\,2}$	
20	1 A				1 A	1 B_3^{-1}	1 A	1 A 1 [E]		1 [C] 1 [E]		1 A 1 [E] 1 E		1 A 8 $C'^{\,20}_{1\,1}$ 1 [C]	
30	4 A		1 [E]			1 A 1 [E]	1 A 1 B_6^{-1}		1 A	1 A	1 [B]	3 B_2^{-3}	2 A 2 E		3 B_2 4 $C'^{\,30}_{1\,0}$

Remarques

1) La première remarque que l'on puisse faire est la multiplicité qui existe souvent au niveau des actions pour relier deux nombres donnés. Ainsi par exemple on a dénombré pas moins de six actions différentes pour passer de 3 à 4. Ce qui montre la variété des approches lorsqu'on laisse entière liberté aux enfants.

2) D'un autre côté on peut rechercher certaines convergences. on s'aperçoit ainsi que:
   - l'action B_2 est pratiquement la seule utilisée lorsqu'il s'agit de doubler:

1 à 2:	13 B_2	(pas très significatifs cependant)
2 à 4:	4 B_2	
3 à 6:	6 B_2	
4 à 8:	7 B_2	
5 à 10:	3 B_2	
6 à 12:	7 B_2 et	1 ${}_1C'_5^6$
10 à 20:	5 B_2 et	2 ${}_1C'_3^{10}$
15 à 30:	2 B_2 et	1 ${}_1C'_2^{15}$
30 à 60:	3 B_2 et	4 ${}_1C'_1^{30}$

   On constate que lorsque les facteurs augmentent il y a apparition d'actions de type ${}_1C'_p^j$, ce qui est dû, en partie du moins, au matériel choisi;
   - l'action B_2^{-1} a souvent été employée (dans les 2/3 des cas) pour passer d'un nombre à sa moitié;
   - lorsque les enfants passent d'un facteur au facteur suivant,

dans le sens croissant (2 à 3, 3 à 4, ..., 10 à 12, ..., 20 à 30) il y a prédominance très nette des actions de la classe $\mathcal{C}$:

$$47\ \mathcal{C}\ \left(9\left({}_1C_p^j\right)^n + 5\left({}_aC_1^j\right)^n + 28\ {}_1C'^j_1 + 3\ C'' + 2\ [C]\right)$$

$$8\ F$$

$$6\ A$$

A noter qu'au niveau des actions de la classe $\mathcal{C}$, celles de types C et C'' se retrouvent pour les petits facteurs, celles de type C' se retrouvent pour les grands facteurs,

dans le sens décroissant (30 à 20, 20 à 15, ..., 3 à 2) il y a prédominance des actions de la classe $\mathcal{E}$:

$$13\ \mathcal{E}\ (1\ {}_aE_1 + 6\ {}_1E_1 + 4\ E + 2\ [E])$$

$$7\ A$$

$$1\ F$$

$$1\ {}_1D''^{12}$$

on voit même que cette classe regroupe la presque totalité des actions qui ne sont pas indéterminées (A).

3) Si on veut déterminer les actions qui ont la préférence des enfants lorsqu'il s'agit de passer d'un facteur donné à un autre facteur, on peut dire que:

- les actions B_2 et ${}_1C'^j_1$ sont les actions les plus naturellement utilisées lorsque l'enfant progresse dans le sens croissant (pour les facteurs);
- les actions B_2^{-1} et celles de la classe $\mathcal{E}$ (entre autres ${}_1E_1$) sont les plus fréquentes lorsque l'enfant progresse dans le sens décroissant.

Dernières remarques

Par rapport aux étapes précédentes on a modifié certaines notations pour raison de commodité principalement au niveau des actions de la classe C .

On a constaté que les actions de type ${}_aC_1^j$ étaient pratiquement inexistantes car supplantées, lorsqu'elles auraient pu apparaître, par les actions de type ${}_1C'_1{}^j$: sur 34 utilisations possibles de ces deux types d'actions dans l'expérience présentée, on a dénombré seulement 2 ${}_aC_1^j$ et les 32 autres sont du type ${}_1C'_1{}^j$. Ainsi, pour passer du facteur 20 au facteur 30 on a recensé 8 ${}_1C'_1{}^{20}$ et pas un seul ${}_{10}C_1^2$! Il faut dire aussi que les actions de type C' sont plus élémentaires que celles de type C .

On a constaté la même chose pour les actions du type ${}_1C_p^j$ (4 fois seulement dont 3 fois chez le même sujet). Par contre, nous avons rencontré des actions moins complexes mais équivalentes et qu'on pouvait noter $\left({}_1C_1^j\right)^p$. Aussi a-t-on créé la sous-classe $\left({}_1C_p^j\right)^n$ pour regrouper ces actions; on a fait de même avec la sous-classe $\left({}_aC_1^j\right)^n$ pour mettre ensemble les anciennes actions du type ${}_aC_1^j$ et les nouvelles du type $\left({}_aC_1^j\right)^n$.

Pour les actions de type C' on n'a pas considéré la sous-classe notée anciennement C'^k_k (chacune des k' piles est partagée en k parties, une par pile restante) tout simplement parce qu'on n'a rencontré aucune action pouvant être classée ainsi. Ce type d'actions sur un plan didactique peut toutefois s'avérer intéressant (lien possible avec la commutativité).

Par ailleurs, on a simplifié les notations pour les actions de la classe $\mathcal{E}$, n'ayant pas jugé indispensable le troisième indice qui figurait primitivement.

Nous avons également modifié sensiblement les notations pour les actions de la classe $\mathcal{A}$ les répartissant désormais en deux sous-classes, ce qui nous a semblé suffisant dans le cadre de notre expérience.

Il faut signaler pour finir que nous avons répertorié deux types d'actions nouvelles le C" et le F , ceci grâce à une meilleure observation; ces actions ne semblent pas cependant être de première importance. Il faut y ajouter les sous-classes [B] , [C] , [D] et [E] que l'on n'avait pas définies auparavant.

II Situation de l'expérimentation dans le cadre des groupements.

2.1 La notion de groupement

La notion de groupement développée par Piaget procure un modèle de la structure intellectuelle innée servant à traiter l'information. Cette information parvient par l'intermédiaire d'actions concrètes, ensuite intériorisées et finalement organisées par cette structure. Les principes de cette dernière reposent essentiellement sur la capacité de l'individu de composer ses actions et de les inverser. Parallèlement à cette structure, l'individu possède des mécanismes d'adaptation qui le poussent à assimiler l'information et à y accommoder (c'est-à-dire , à réorganiser) ses connaissances acquises. C'est le résultat de ce processus d'organisation que l'on qualifie de groupement. On peut parler ainsi du groupement d'une partie des nombres naturels vus sous l'angle de l'ordination. Le groupement décrit alors l'évolution de l'organisation de ces nombres par l'action intériorisée: "ajouter 1". Pour plus de détails sur ces notions, on pourra se référer à [11].

Plusieurs mathématiciens et didacticiens ont tenté de formaliser ces notions en langage mathématique, particulièrement Steiner [12] et Wittmann [1]. Nous adoptons ici la deuxième formulation de Wittmann en termes de catégories [2] et qui est la suivante:

DEFINITION

Un *groupement* est un quadruplet $\mathcal{D} = (S, T, C, \circ)$ où

S est appelé l'ensemble des états,

T est appelé l'ensemble des opérations,

C est appelé l'ensemble des opérations élémentaires,

$\circ$ est la composition partielle entre morphismes,

qui satisfait aux conditions suivantes:

G_1 : $(S, T, \circ)$ est une catégorie où chaque morphisme est inversible,

G_2 : T est engendré par C, sous-ensemble de T, dans le sens suivant: pour $f \in T$, il existe $g_1, \ldots, g_n \in C \cup C^{-1}$ tels que $f = g_1 \circ \ldots \circ g_n$,

(G_3 : C contient les unités de S.)

La condition G_3 n'étant pas essentielle, nous ne l'intégrerons pas à la définition, car en pratique les unités n'apparaissent qu'en phase terminale, suite à la composition et à la réversibilité.

Nous ajoutons les définitions nouvelles de "fragment de groupement" et de "sous-groupement" qui constituent des étapes intermédiaires vers la formation de groupements.

DEFINITION

$\mathcal{G}' = (S', T', C', \circ')$ est dit *fragment du groupement* $\mathcal{G} = (S, T, C, \circ)$

si

1. $\emptyset \neq S' \subset S$, $T' \subset T$, $C' \subset C$, $0' = 0$ restreint à S', C' porte sur S'
2. $C' \subset T'$, $T' \subset \overline{C'}$

N.B. a) "C' porte sur S'" signifie que les éléments de C' sont des morphismes entre éléments de S'

b) $\overline{C'}$ désigne l'ensemble engendré par $C' \cup (C')^{-1}$

DEFINITION

Un fragment $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ est dit *sous-groupement* de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G}'$ est lui-même un groupement.

2.2 Considérations sur les termes utilisés

Piaget utilise les termes *d'action concrète ou effective*, *d'action intériorisée* et *d'opération*. Une action concrète désigne toute activité sensorielle subie, posée ou imaginée sur un objet. Elle devient intériorisée lorsqu'apparaît la généralité de son application à d'autres objets. Une action intériorisée provient donc d'un ensemble d'actions concrètes et donne lieu à un ensemble d'applications à des objets. Lorsqu'il décrit le traitement de ces actions intériorisées par les lois du groupement, Piaget utilise plutôt le terme opération. Wittmann, quant à lui, distingue parmi ces opérations (entendre: actions intériorisées) des opérations plus primitives qu'il appelle *opérations élémentaires*. Ces dernières constituent les "générateurs" de l'ensemble des opérations.

Piaget fait une distinction entre *opérations concrètes* et *opérations formelles*. Bien que jouissant des mêmes propriétés dans la notion de groupement, les premières restent liées aux objets réels. Les opérations dont il sera question dans ce rapport sont du premier type. Piaget mentionne de plus le terme de schème et en particulier de schème opératoire. Cette dernière appellation désigne des "ensembles organisés d'opérations" comme "classer, sérier, mesurer". Par abus de langage, ce terme sera quelquefois utilisé comme synonyme d'opération.

Il subsiste un léger abus de langage, tant chez Wittmann que chez Piaget, qui confond en un même terme l'action intériorisée et son application à un objet particulier. La même ambiguité existe pour désigner la structure générale de groupement et son application à un environnement particulier. Nous ne corrigerons pas ces imprécisions mineures.

Dans la présente recherche, nous avons d'abord observé des actions concrètes: par exemple, passer de 4 piles à 2 piles en posant une première sur une seconde et une troisième sur une quatrième. Nous avons cependant décrit cette dernière sous la forme intériorisée suivante, après l'avoir rencontrée dans d'autres situations (passage de 6 piles à 3 piles, etc.): "reporter pile sur pile" (B_2). Nous avons généralisé cette approche à la description des autres actions concrètes observées. Nous ferons l'hypothèse qu'il est pertinent de considérer comme intériorisée une action qui a été utilisée au moins deux fois, à des situations différentes, par le même sujet.

Si l'on passe en revue les actions inventoriées (pages 7 et 8), on constate d'abord que la classe $\mathcal{A}$ fait exception à cette description. Nous n'avons, en effet aucune "preuve" qu'elle est constituée d'actions intériorisées. On aurait d'ailleurs du mal à en imaginer les inverses. Il nous semble plus prudent de les considérer comme des actions concrètes. De toutes manières, nous ne voyons pas comment elles pourraient être exploitées. Il en va de même pour les actions $\left({}_aC^j_1\right)^n$, D, B_p et ${}_aD''^j$: aucun enfant n'a utilisé ces actions plus d'une fois. Nous les considérerons comme des actions concrètes effectuées par les enfants, bien qu'elles aient été décrites sous forme intériorisée. Les actions du type "crochet" ([ ]) sont à rapprocher, selon cette description, des actions de la classe $\mathcal{A}$. Quant aux autres actions, il est plausible de croire qu'ayant été intériorisées par au moins un enfant, elles pourront l'être par d'autres du même âge à l'aide d'une unité d'enseignement appropriée.

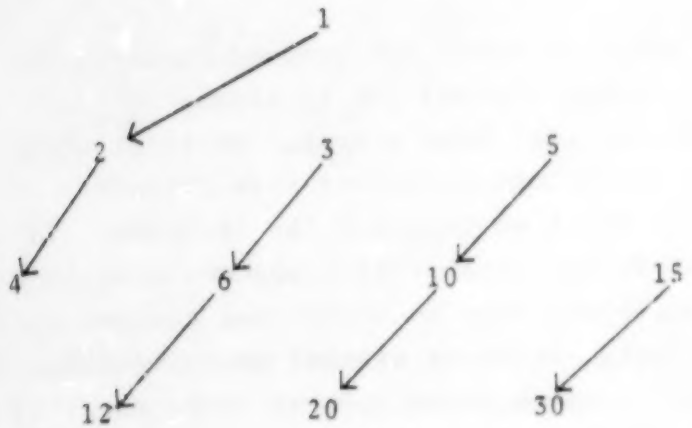
2.3 Analyse de certains graphes sous l'aspect des groupements

Les graphes construits à partir des actions effectuées de chaque enfant ne peuvent en aucun cas être considérés comme

des groupements. Ils ne sont que des amorces de groupements, puisque seules certaines opérations élémentaires ont été mises en évidence. Aucune intervention n'a été faite pour en déceler ou favoriser la composition ou la réversibilité, encore moins une structuration consciente. C'est précisément l'objectif de l'unité d'enseignement d'intervenir dans ce sens en tablant sur ces débuts de groupements.

Etudions le graphe (29) . Nous ne garderons que les actions qui ont été intériorisées dans le sens défini plus haut.

C:



60

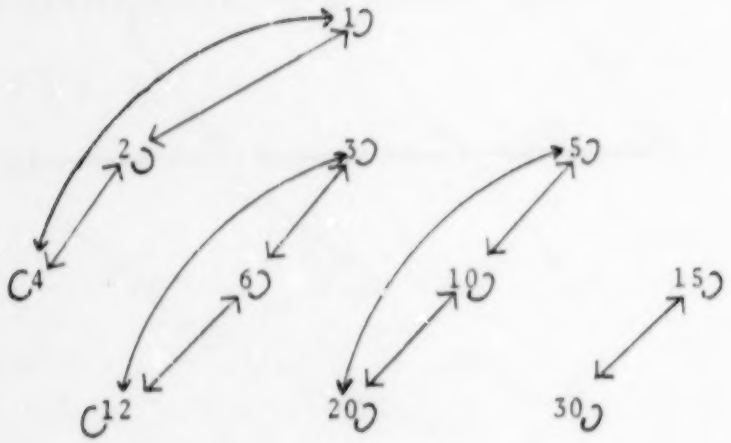
(C) porte sur $S' = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30\}$.

Selon que nous considérons S' ou $S = S' \cup \{60\}$, nous serons en présence de la formation éventuelle d'un sous-groupement d'un groupement plus large portant sur S, ou d'un fragment de ce même groupement. En effet, si S est l'ensemble des états, il est impossible à l'aide de ce C d'engendrer l'unité de 60 et donc de former une catégorie $(S, T, \circ)$ où T est engendré par C. Par contre, si nous nous restreignons à S',

voici quel est le sous-groupement dont nous pourrions favoriser l'éclosion:

(S', T, C, ∘) où

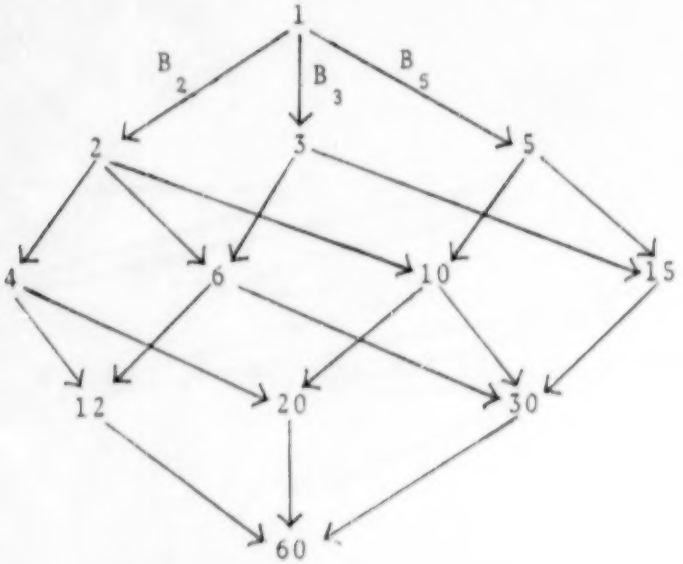
T:



En intervenant auprès de cet enfant pour lui faire intérioriser des actions lui permettant de compléter certains liens manquants, nous pourrions l'amener aux groupements suivants (qui contiendraient alors le précédent):

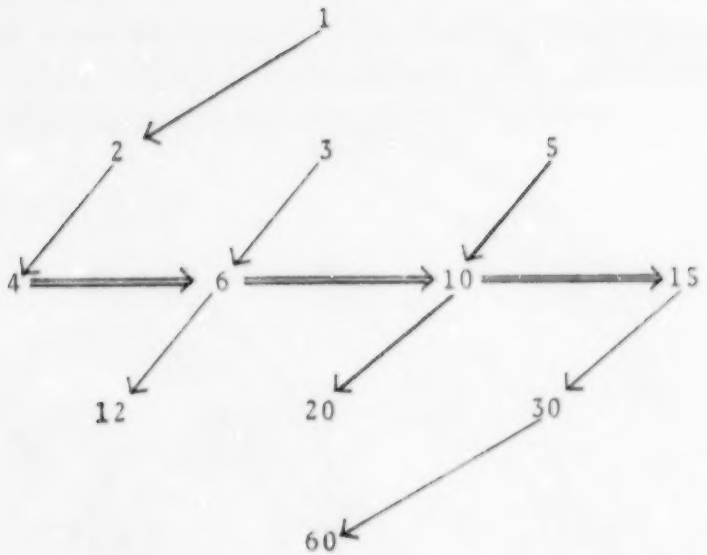
a) $(S, S \times S, C_1, \circ)$ où

C_1:

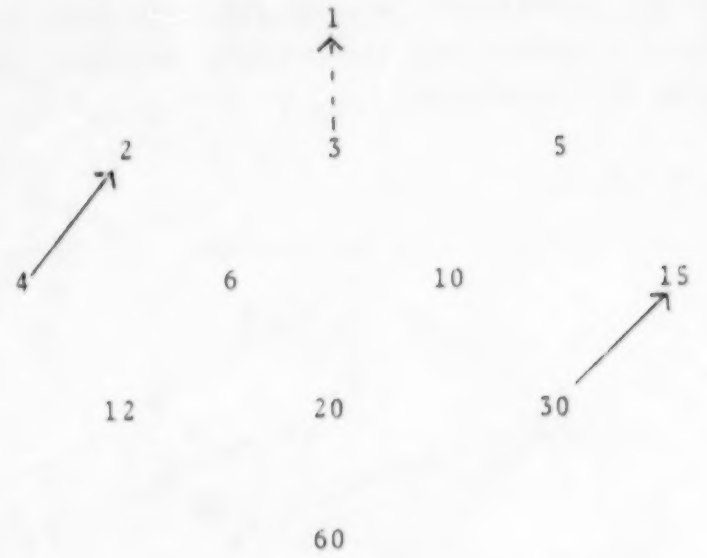


b) $(S, S \times S, C_2, \circ)$ où

C_2 :



Etudions maintenant le cas (4) . Il se résume (dans les mêmes hypothèses que précédemment) à:



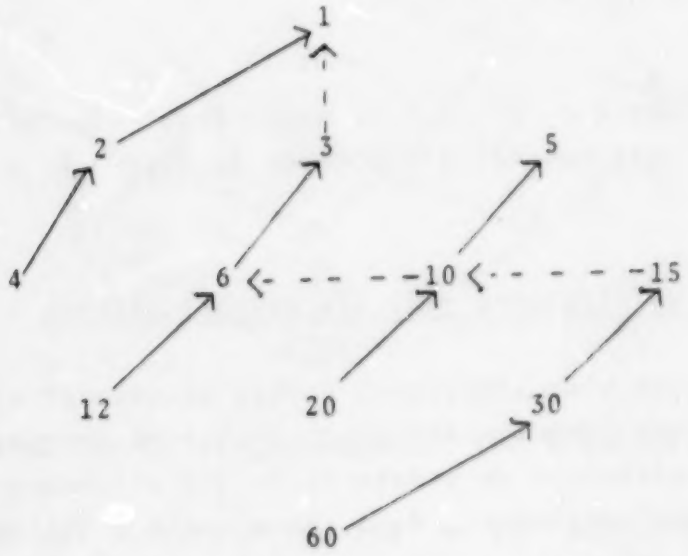
Pour cet enfant, il est évident que B_2^{-1} et $_aE_1$ n'en sont

qu'au tout premier stade de l'intériorisation. Nous ne pouvons parler que de fragment de groupement qui déboucherait éventuellement sur un sous-groupement très pauvre. Cependant, une intervention pour exploiter les éléments en place pourrait conduire au développement du groupement suivant:

$(S, S \times S, C, \circ)$

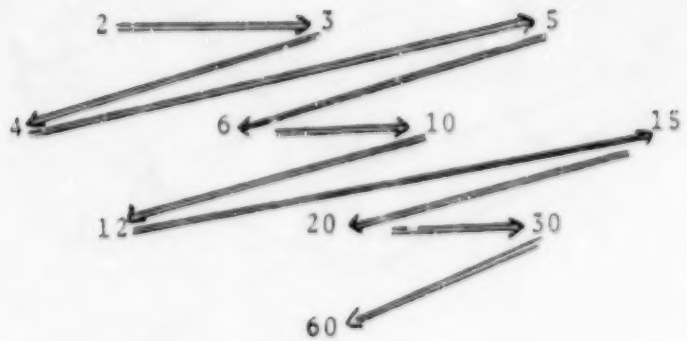
où

C:



Regardons le cas (9) sous les mêmes conditions.

C: 1



Dans ce cas, l'intériorisation est bien amorcée et l'intervention, pour la formation du groupement qui suit, se limiterait presque à l'approche de la réversibilité sous forme d'une prise de conscience du lien existant entre ces actions et des actions du type $_aE_1$ et leur composition:

$$(S, S \times S, C_1, \circ)$$

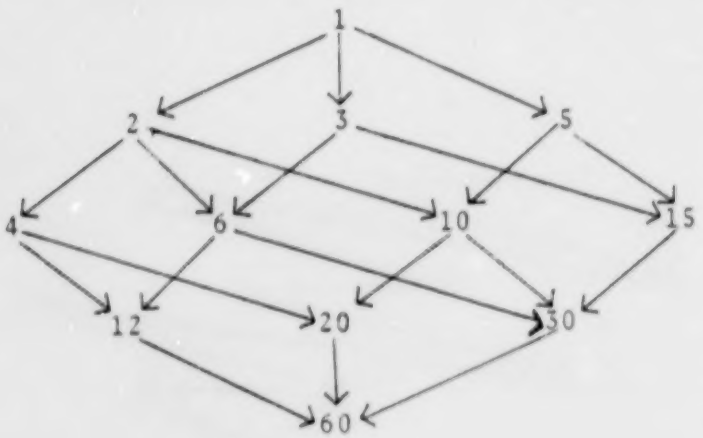
où C_1 : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 15 \rightarrow 20 \rightarrow 30 \rightarrow 60$

et $S \times S = \overline{C_1} \cup C_1^{-1}$

A remarquer que $\overline{C_1}$ est un ordre total des facteurs de 60 et que C_1^{-1} est constitué d'actions du type $_aE_1$.

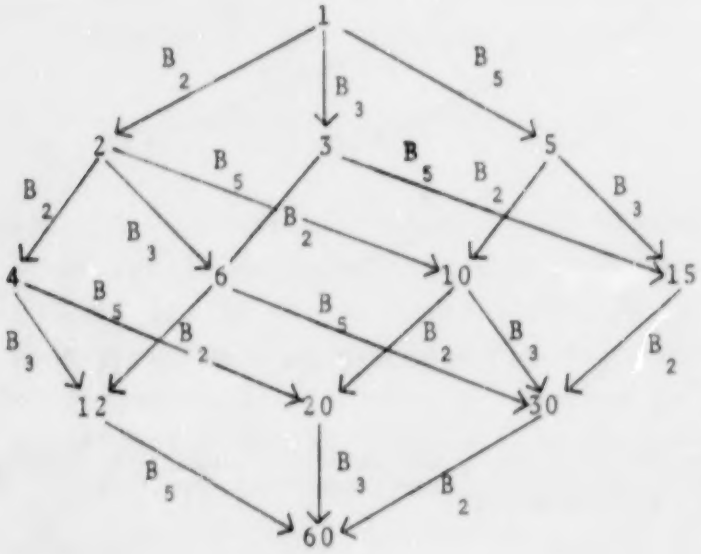
2.4 Cadres de référence pour les graphes obtenus

D'une façon plus théorique, voyons maintenant comment certaines actions inventoriées pourraient être perçues dans un cadre plus classique de présentation des diviseurs d'un nombre. On trouve habituellement, dans les manuels scolaires, les diviseurs d'un nombre structurés sous forme de treillis. Ainsi pour 60, on verrait:



Ce qui, avec un peu d'imagination, prend l'allure d'un double cubes posés sur la pointe.

Vu sous l'angle des groupements et des actions inventoriées, ce treillis devient:

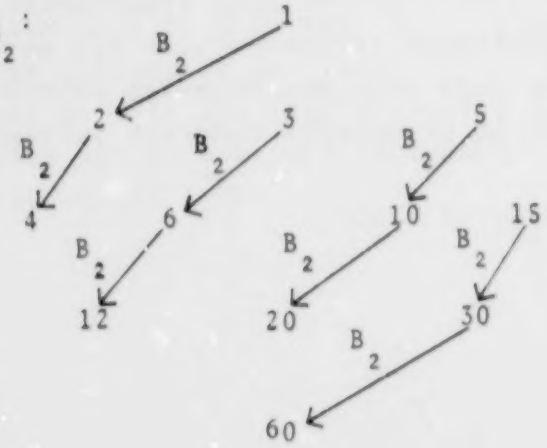


et est ainsi le C du groupement: (S, S x S, C, ∘)

Ce groupement est alors la "réunion" ou la "superposition" des sous-groupements:

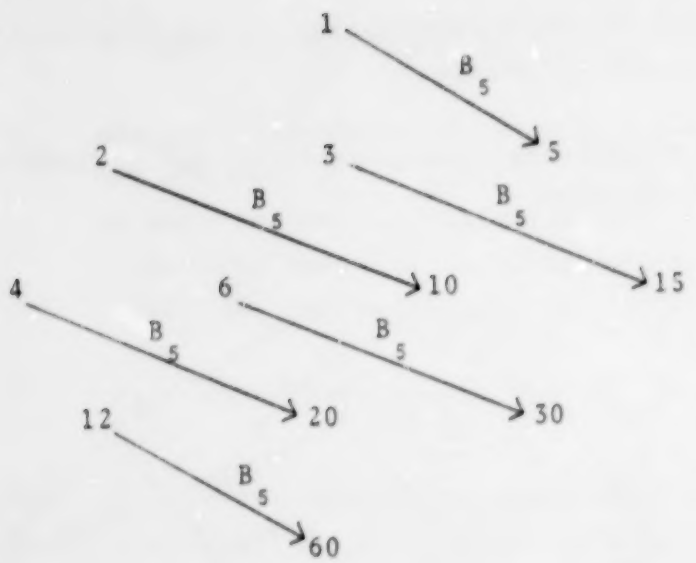
$(S, T_{B_2}, C_{B_2}, \circ)$, $(S, T_{B_3}, C_{B_3}, \circ)$, $(S, T_{B_5}, C_{B_5}, \circ)$ où

C_{B_2} :



C_{B_3} :

C_{B_5} :



et où T_{B_i} est engendré par $B_i \cup B_i^{-1}$.

Pour une définition précise de l'union de sous-groupements, on peut se référer à [Z].

On met ainsi à jour un autre mode d'intervention qui consiste à superposer des structurations élémentaires pour obtenir une structuration plus complexe par opposition à une complétion d'une structuration partielle par l'adjonction d'opérations élémentaires nouvelles. La connaissance, en général, procède d'ailleurs de cette manière.

Nous pouvons décrire le résultat global de l'expérimentation en termes de groupements. En effet, les actions répertoriées contiennent potentiellement plusieurs structurations des diviseurs de 60. Si nous traitons dans leur ensemble les dernières en les superposant, on obtient le groupement complexe suivant:

$\mathcal{G}_{60} = (S_{60}, T_{60}, C_{60}, \circ)$ où:

S_{60} désigne les diviseurs de 60,

C_{60} désigne l'ensemble des actions intériorisées des classes $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, auquel on doit ajouter certains composés de ces actions avec des actions intériorisées de la classe $\mathcal{D}$ qui rejoignent des diviseurs,

T_{60} est l'ensemble engendré par $C_{60} \cup C_{60}^{-1}$.

Bien entendu, C_{60} n'est pas minimal pour engendrer T_{60} . De plus, $\mathcal{D}_{60}$ ne décrit qu'une partie des structurations possibles des diviseurs de 60. Autrement dit, $\mathcal{D}_{60}$ peut être vu comme un sous-groupement du groupement idéal correspondant au concept des diviseurs de 60. Mais il devient le groupement dans lequel s'insèrent tous les fragments de groupements ou sous-groupements amorcés par les enfants lors de l'expérimentation.

Il est à remarquer que le cardinal de T_{60} est plus grand que celui de $S \times S$. Nous pouvons constater ce phénomène dans plusieurs graphes observés. Certains débuts de structurations conduisent en effet à plus d'un lien entre deux états donnés. Ceci correspond à la superposition de plus d'une structuration sur un même ensemble d'états. Ainsi, dans le cas (23) , la composition et la réversibilité des opérations élémentaires créeraient au moins deux liens de nature différente entre 3 et 6, l'un par B_2 , l'autre par la composition de deux actions de la classe $\mathcal{C}$. Une intervention possible dans de tels cas consisterait à distinguer les deux structurations en les traitant isolément. On retrouve la même situation dans le cas (2) .

2.5 Approche classique vs approche "groupements" pour structurer les diviseurs d'un nombre.

L'approche "groupements" est supérieure, à notre avis, à l'approche classique et ce, pour les raisons suivantes:

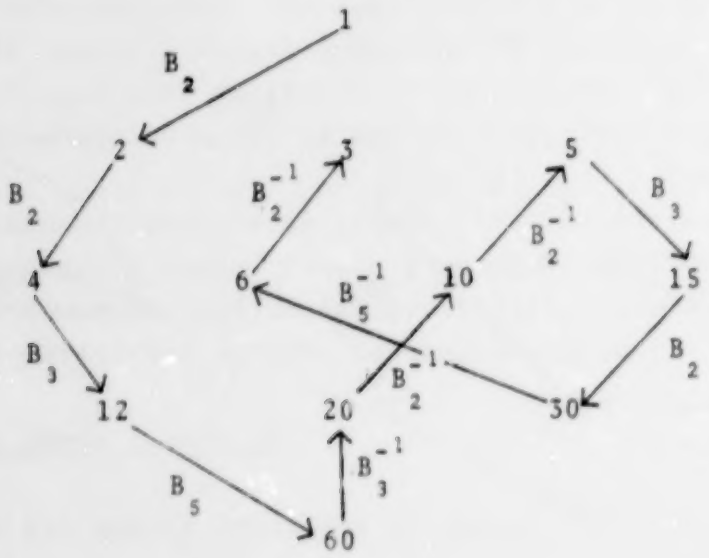
a) Alors que l'approche classique ne met en évidence qu'une seule structuration, l'approche "groupements" en favorise beaucoup d'autres, notamment celles correspondant aux actions de la classe $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{E}$, ou même à un amalgame d'actions de plusieurs classes. En d'autres mots, le treillis classique des diviseurs correspond à un groupement parmi d'autres dans le processus de structuration des diviseurs.

b) L'approche "groupements" exploite les erreurs; c'est le rôle des actions de la classe $\mathcal{D}$ que l'on pourrait qualifier de correcteurs d'erreurs.

c) A l'intérieur d'une même structuration, l'approche "groupements" permet beaucoup de souplesse dans la poursuite du résultat final en acceptant comme point de départ tout ensemble C qui engendre T. Ainsi, le treillis classique n'est pas minimal pour engendrer S x S.

d) Enfin, en partant de la démarche naturelle de l'enfant, l'approche "groupements" est essentiellement dynamique. Elle consiste en effet, idéalement, à construire dans le cas présent un chemin hamiltonien dans l'ensemble des diviseurs à l'aide d'actions qui ont pour effet secondaire très important de bâtir les diviseurs du nombre. Par opposition, le treillis classique paraît statique et abstrait.

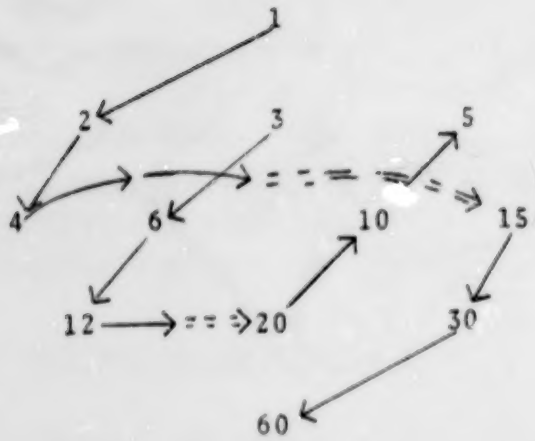
Voici un exemple théorique de structuration par des actions de la classe $\mathcal{B}$ qui, développé, conduirait au même type de groupement que celui correspondant au treillis classique:



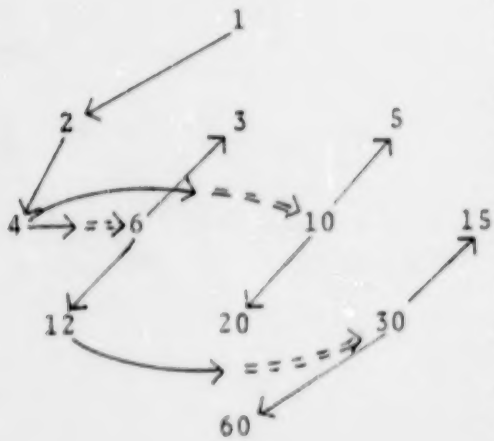
Pour résumer, cette approche permet d'exploiter la démarche naturelle de l'enfant en l'orientant vers une structuration qui sera mieux en accord avec ses acquis (éventuellement groupements) antérieurs. Elle donne, de plus, tout son sens à la manipulation et à la phase du jeu libre. Les premières structurations doivent cependant être vues comme des tremplins servant au développement de structurations plus orientées vers des besoins mathématiques précis.

Voici quelques débuts de structurations possibles qui font appel à des actions de classes différentes:

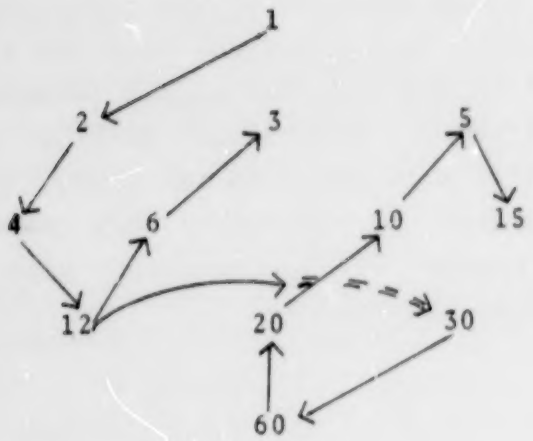
1.



2.



3.



III Notions et propriétés reliées aux actions

En utilisant l'une ou l'autre des actions inventoriées, l'enfant manipule, le plus souvent à son insu, des notions et propriétés mathématiques. Un des buts de l'unité d'enseignement sera de rendre l'enfant conscient de certaines notions et propriétés qui sont reliées à son action pour qu'il les maîtrise davantage ou qu'il en amorce l'apprentissage.

Nous indiquons, dans cette partie, les notions et propriétés qui correspondent à chaque classe d'actions; en d'autres mots, nous montrons quelles notions et propriétés peuvent être développées à partir des actions de chaque classe.

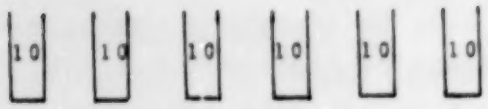
a) Actions de la classe $\mathcal{B}$

L'enfant qui empile les piles de jetons 2 à 2 (B_2), qui empile p piles (B_p), qui partage chaque pile en deux (B_2^{-1}) ou en plusieurs parties égales (B_p^{-1}) peut être facilement orienté vers les constatations suivantes: soit qu'il *multiplie* par 2, 3, etc. le nombre de jetons de chaque pile ou le nombre de piles, soit qu'il *divise* par 2, 3, etc. le nombre de jetons ou de piles.

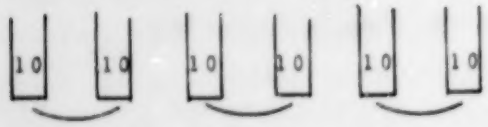
Rendre l'enfant conscient qu'il peut, *moyennant certaines conditions*, utiliser des actions de la classe $\mathcal{B}$ c'est l'amener, par exemple, à la connaissance des notions de *diviseur*, de *multiple*, de *parité*, ainsi que d'une propriété de la multiplication: l'*associativité*.

Exemples

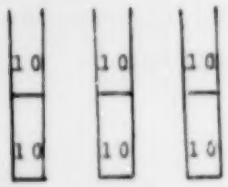
1) avec B_2 (graphes (2) , (8) , (29) , (30) , (31))



6 x 10



(3 x 2) x 10

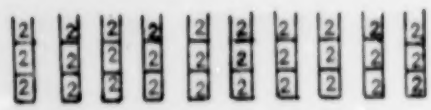


3 x (2 x 10)

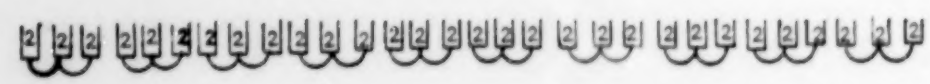
3 x 20

2) avec B_3^{-1} ((30))

10 x 6



10 x (3 x 2)

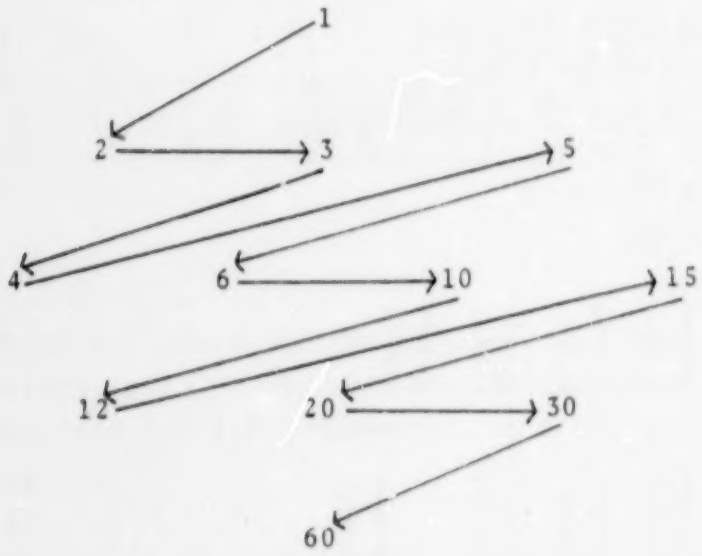


(10 x 3) x 2
30 x 2

Remarquons que, dans les deux cas, il y a *division* du nombre 6 par 3: avec B_2 , les 6 piles sont partagées en 3 groupes de 2; avec B_3^{-1} , les 6 jetons de chaque pile sont partagés en 3 groupes de 2. De plus, tout en illustrant les diviseurs 10, 20, 6 et 2 de 60, la manipulation permet de "visualiser" les *produits* 6 x 10, 3 x 20, 10 x 6, 30 x 2 et de reconnaître leur *égalité*.

b) Actions des classes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$

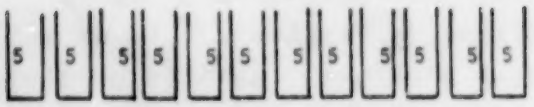
L'observation des graphes (pages 9 à 41) permet de reconnaître un premier rôle des actions des classes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$, particulièrement de $\mathcal{C}$: favoriser la *linéarité*. La stratégie linéaire utilisée par beaucoup d'enfants, dans la présente expérimentation, soit au niveau des jetons soit au niveau des piles, peut être exploitée en rendant conscientes les actions $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ qui permettent d'*ordonner les diviseurs* par ordre croissant ou décroissant. On développe ainsi le treillis suivant formé des actions $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{E}$ avec les flèches inversées):



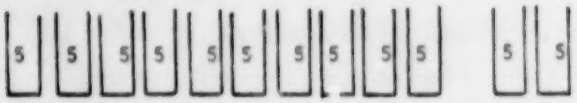
Une propriété des opérations que permettent de développer d'une façon privilégiée les actions des classes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ est la *distributivité* de l'addition sur la multiplication.

Exemples

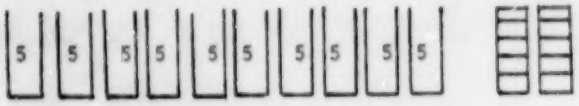
1) avec ${}_1C_2^5$ ((32))



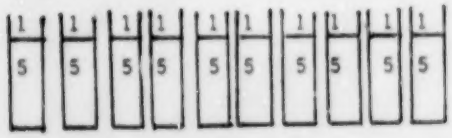
12 x 5



(10 + 2) x 5
(10 x 5) + (2 x 5)

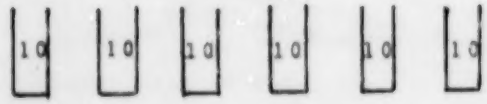


(10 x 5) + ((5 x 1) + (5 x 1))
(10 x 5) + (10 x 1)



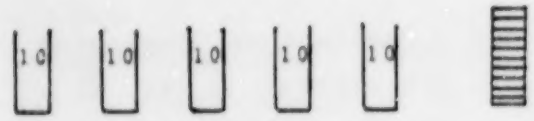
10 x (5 + 1)
10 x 6

2) avec ${}_1C_1'^{10}$



6 x 10

(5 + 1) x 10
(5 x 10) + (1 x 10)



(5 x 10) + (10 x 1)
(5 x 10) + ((5 x 1) + 5 x 1))

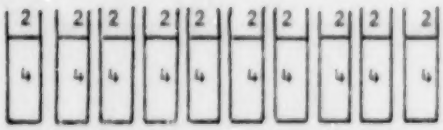
5 x (10 + 1 + 1)
5 x 12

Dans les deux exemples, il y a d'abord une *distributivité à gauche*, au niveau des piles. Puis, après la transformation

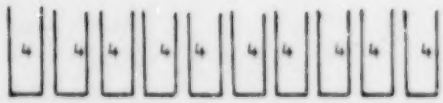
du dernier produit en un produit égal ou une somme de produits égaux, on a une *mise en facteurs*.

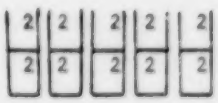
3) avec $_{2}E_{1}$ ((16) , (25))

10 x 6



10 x (4 + 2)
(10 x 4) + (10 x 2)





(10 x 4) + 5 x (2 x 2)
(10 x 4) + (5 x 4)
(10 + 5) x 4
15 x 4

Avec $\mathcal{E}$, on a d'abord une *distributivité à droite*, au niveau des jetons, puis, après une transformation du dernier produit, comme dans les cas précédents, on a une *mise en facteurs*.

L'*associativité* de la multiplication, particulièrement mise en évidence par les actions $\mathcal{B}$, est utilisée aussi dans les actions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{E}$ (10 piles de 2 ou (5 x 2) piles de 2 jetons considérées comme 5 piles de (2 x 2) jetons, en 3)) de même que la *commutativité* (1 pile de 10 jetons considérée comme 10 parties de 1 jeton en 2)).

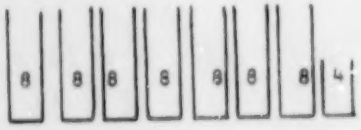
c) Actions de la classe $\mathcal{D}$

Les actions de la classe $\mathcal{D}$ utilisées pour corriger les erreurs sont de type $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{E}$ et, par conséquent, sous-tendent les mêmes propriétés.

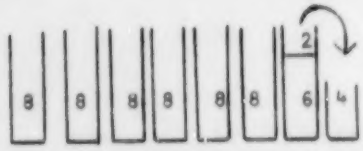
Exemples

On remarque sur le graphe (31) que l'enfant, une fois qu'il a choisi de travailler dans la classe $\mathcal{B}$, utilise des actions $\mathcal{D}$ pour corriger les actions "manquées" par $\mathcal{B}$ (le nombre atteint n'est pas un diviseur de 60).

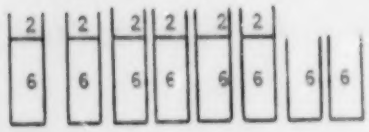
1) avec D (type $\mathcal{E}$)



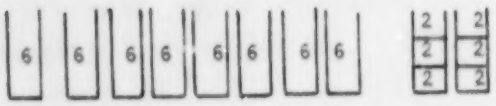
(7 x 8) + 4



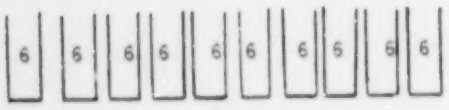
(6 x 8) + (2 x 6)



(6 x (6 +2)) + (2 x 6)
(6 x 6) + (6 x 2) + (2 x 6)



(8 x 6) + (2 x (3 x 2))



10 x 6

2) avec $_{6}D''^{2}$ (type 6)

(2 x 24) + 12

(2 x 24) + (2 x 6)

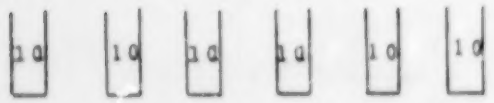
2 x (24 +6)

2 x 30

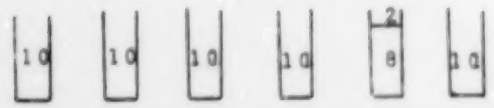
d) Action F

Quelques exemples d'application de F éclaireront la portée mathématique de cette action.

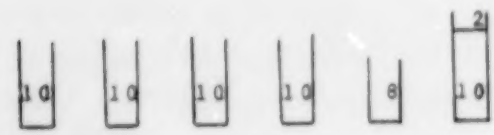
1) (graphe (30))



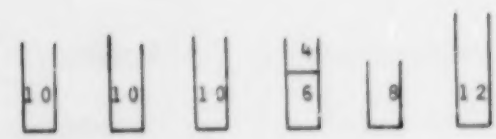
10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10



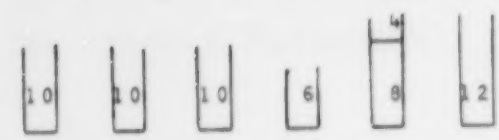
10 + 10 + 10 + 10 + (8 + 2) + 10



10 + 10 + 10 + 10 + 8 + (2 + 10)



10 + 10 + 10 + (6 + 4) + 8 + 12



10 + 10 + 10 + 6 + (4 + 8) + 12

etc.

2) (④ , ⑦ , ⑰)

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 = \quad & 10 \times 5 + 1 \times 4 + 1 \times 6 \\
& 9 \times 5 + 1 \times 3 + 2 \times 6 \\
& 8 \times 5 + 1 \times 2 + 3 \times 6 \\
& 7 \times 5 + 1 \times 1 + 4 \times 6 \\
& 6 \times 5 + 5 \times 6 \\
& 4 \times 5 + 1 \times 4 + 6 \times 6 \\
& 3 \times 5 + 1 \times 3 + 7 \times 6 \\
& 2 \times 5 + 1 \times 2 + 8 \times 6 \\
& 1 \times 5 + 1 \times 1 + 9 \times 6 \\
& 10 \times 6
\end{aligned}
$$

La première étape consiste à *décomposer* un nombre *en une somme* de deux nombres, la deuxième à appliquer l'*associativité*, la troisième à décomposer le nombre précédent en une somme de deux nombres, la quatrième à appliquer l'associativité et ainsi de suite.

L'action F favorise évidemment la *linéarité* graphe ⑦ : $3 \xrightarrow{F} 4 \xrightarrow{F} 5 \xrightarrow{F} 6 \xrightarrow{F} 7$. Notons cependant que la condition de son application avec succès n'est pas simple à reconnaître.

Remarque

Dans cette partie, nous avons relevé plusieurs notions et propriétés reliées aux actions. Il reste à signaler que d'autres notions et propriétés mathématiques peuvent être développées, à un niveau plus élevé, à partir des graphes. Dans la préparation de l'unité d'enseignement, nous nous attarderons à les analyser. Contentons-nous d'en signaler ici quelques-unes:

$a|b \wedge b|c \Longrightarrow a|c$ (transitivité)

$a|b \wedge a|c \Longrightarrow a|b + c$

$(\text{div } a) \subseteq (\text{div } na)$.

Conclusion

L'expérimentation que nous avons menée et l'analyse que nous en avons faite ouvrent de nombreuses voies pour un enseignement enrichi, dynamique, individuel et progressif. Les tendances que les enfants ont manifestées dans le choix de leurs actions pour trouver les diviseurs d'un nombre, les débuts de structurations qu'ils ont commencé à construire très librement, les notions et propriétés mathématiques qu'ils ont approchées à leur insu, sont autant de données que nous nous proposons d'exploiter dans l'élaboration d'une unité d'enseignement.

Bibliographie

[1] E. Wittmann, The Concept of Grouping in J. Piaget's Psychology. Formalisation and Applications, Educational Studies in Mathematics 5 (1973), 125-146.

[2] E. Wittmann, Natural Numbers and Groupings, Educational Studies in Mathematics 6 (1975), 53-75.

[3] G. MUller, E. Wittmann, Der mathematikunterricht in der Primarstufe, Vieweg, 1977.

[4] D. Lunkenbein, Rationalizing Teaching Interventions, Educational Studies in Mathematics 8 (1977), 271-293.

[5] R. Bibeau, Essai de rationalisation d'une séquence de situations d'apprentissage: la classification de quadrilatères, Mémoire de maîtrise, D.G.F.M., Université de Sherbrooke, juin 1977.

[6] M. Hamel, Schématisation de groupements logiques d'inclusion dans l'étude de quadrilatères, Mémoire de maîtrise, D.G.F.M., Université de Sherbrooke, juin 1979.

[7] L. Aubin, J. Jutras, Elaboration de groupements logiques d'inclusion et de groupements logiques des classes d'une partition dans un ensemble d'hexagones, Mémoire de maîtrise, D.G.F.M., Université de Sherbrooke, septembre 1979.

[8] H. Allard, P. Allard, C. Goupille, D. Lunkenbein, Polyèdres - Unité d'enseignement en cinq leçons, Rapport No 25, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke, février 1979.

[9] D. Lunkenbein, Formation de groupements - Tentatives de recherches en apprentissage dans l'étude de la pertinence du concept de groupement comme outil de la rationalisation des interventions didactiques, Rapport No 24, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke, février 1980.

[10] M. Fortier, B. Héraud, L. Thérien, Recherche en apprentissage et en enseignement sur les diviseurs d'un nombre, Rapport No 27, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke, juillet 1979.

[11] J. Piaget, L'équilibre des structures cognitives, problème central du développement, Presses Universitaires de France, 1975.

[12] H. G. Steiner, Mathematische Praezisierungen und didaktisch relevante modelle zum Piagetschen Gruppierungsbegriff, Didaktik der Mathematik, 3, 1973, 210-225.